



NUMPRESS

**System komputerowej analizy, optymalizacji
i niezawodności przemysłowych procesów tłoczenia blach**

Program NUMPRESS–Explicit Podstawy teoretyczne

**Produkt, którego dotyczy niniejszy dokument,
powstał w ramach projektu, realizowanego w IPPT PAN w latach 2009–2014,
współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego
w ramach Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka**

Spis treści

Cel i zakres pracy	3
1 Sformułowanie teoretyczne problemu	4
Wstęp	4
1.1 Główne założenia modelu tłoczenia blach	4
1.2 Sformułowanie zagadnienia kontaktowego	6
1.3 Zasada prac przygotowanych dla zagadnienia kontaktowego	9
1.4 Dyskretyzacja przestrzenna MES zagadnienia kontaktowego	10
1.5 Regularyzacja ograniczeń kontaktowych	14
1.6 Obliczanie sił oddziaływania kontaktowego	15
1.7 Dyskretne równania ruchu z uwzględnieniem tłumienia	16
1.8 Sformułowanie elementu powłokowego	16
1.9 Model konstytutywny materiału	18
1.10 Dyskretyzacja równań ruchu po czasie	25
1.10.1 Całkowanie niejawne równań ruchu	25
1.10.2 Schemat jawny całkowania równań ruchu	26
1.10.3 Stabilność schematu całkowania równań ruchu	27
Podsumowanie	27
2 Opis programu	28
3 Przykłady testowe	30
3.1 Symulacja tłoczenia naczynia kwadratowego – test NUMISHEET’93	30
3.2 Symulacja tłoczenie naczynia o kształcie krzyża – test NUMISHEET’2011	34

Cel i zakres pracy

Program NUMPRESS-Explicit jest jednym z dwóch programów dostępnych w systemie NUMPRESS, służących do numerycznej symulacji procesów tłoczenia blach. Stworzony moduł obliczeniowy metody elementów skończonych przeznaczony jest do dokładnej analizy zagadnień tłoczenia blach wykorzystującego sformułowanie dynamiczne metody elementów skończonych (MES) z jawnym schematem całkowania równań ruchu. Do zalet metod jawnych należą małe wymagania wobec pamięci komputera, dzięki temu że nie buduje się macierzy sztywności układu. Złożoność obliczeniowa, zarówno czasowa jak i pamięciowa, jest liniowa w zależności od liczby stopni swobody.

Opracowany program numeryczny został zweryfikowany poprzez analizę wielu przykładów testowych. Przeprowadzona weryfikacja wykazała poprawne działanie programu numerycznego oraz możliwość wykorzystania programu numerycznego do symulacji rzeczywistych zagadnień tłoczenia blach.

Niniejsze opracowanie składa się z trzech części. W pierwszej części przedstawiono podstawy teoretyczne programu, druga część stanowi krótki opis najważniejszych elementów implementacji numerycznej, a w trzeciej przedstawiono wybrane przykłady numeryczne weryfikujące opracowany numeryczny.

1 Sformułowanie teoretyczne problemu

Wstęp

Tłoczenie jest ważną metodą przeróbki plastycznej stosowaną do kształtowania części z blachy. Mimo wprowadzania nowych materiałów i rozwoju nowych technologii tłoczenie blach jest w dalszym ciągu podstawowym procesem technologicznym w produkcji części karoserii w przemyśle samochodowym oraz w wytwarzaniu wielu części metalowych w innych sektorach przemysłu.

Programy MES, wykorzystujące jawne całkowanie równań ruchu względem czasu, stały się bardzo popularne w zastosowaniu do symulacji procesów kształtowania blach [11, 10, 28]. Analiza rzeczywistych części o bardzo skomplikowanej geometrii prowadzi do bardzo dużych modeli, które wymagają dużej mocy obliczeniowych i efektywnych algorytmów rozwiązania. Programy jawne charakteryzują się dużą efektywnością rozwiązania na pojedynczym kroku przyrostowym i małymi wymaganiami pamięci. Nieiteracyjny algorytm rozwiązania jest niezawodny w działaniu. Aczkolwiek z powodu warunkowej stabilności numerycznej jawnego schematu całkowania długość kroku jest ograniczona i konieczne jest stosowanie dużej liczby kroków całkowania, to jednak w przypadku dużych modeli obliczeniowych zalety tej metody przeważają nad jej wadami i to czyni tę metodę popularną w zastosowaniu do rzeczywistych procesów tłoczenia.

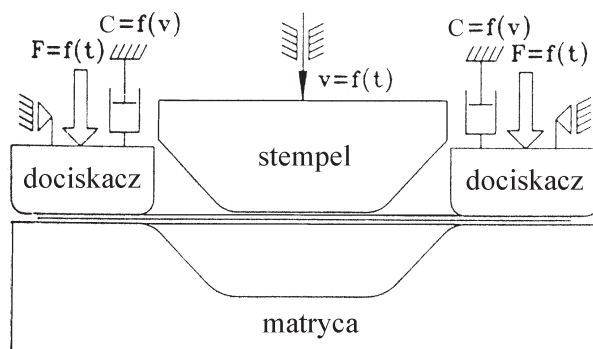
Symulacja numeryczna pozwala przewidzieć zachowanie tłoczonej blachy w trakcie całego wieloetapowego procesu technologicznego. Do najbardziej interesujących możliwości analizy numerycznej w zastosowaniu do tłoczenia blach należą:

- kształt wytłoczki w czasie kształtowania i po sprężynowaniu powrotnym,
- rozkład odkształceń lokalnych w blasze,
- rozkład grubości blachy,
- lokalizacja odkształceń – możliwość pęknięcia blachy,
- stwierdzenie możliwego pofałdowania blachy,
- określenie obszarów zarysowanych poprzez progi ciąagowe,
- określenie wymaganej siły tłoczenia,
- określenie zużycia narzędzi.

Dzięki wynikom uzyskanym w symulacji można zoptymalizować projektowany proces technologiczny, skrócić cykl projektowania oraz zmniejszyć koszty związane z uruchomieniem produkcji.

1.1 Główne założenia modelu tłoczenia blach

W typowym modelu procesu głębokiego tłoczenia (rys. 1) uwzględnia się kształtowaną blachę oraz elementy tłoczniaka: matrycę, stempel i dociskacz. Narzędzia zasadniczo mogą być traktowane jako sztywne, choć w niektórych przypadkach gdy nacisk dociskacza jest nierównomierny, pożądane jest uwzględnienie w modelu jego odkształcalności. Osiągnięcie określonego kształtu przez wytłoczkę jest wymuszone poprzez oddziaływanie kontaktowe blachy z narzędziami, których kinematyka jest określona. Wzajemne przemieszczenie stempla i matrycy jest zadane według rzeczywistego procesu tłoczenia, przyjmując np. nieruchomą



Rysunek 1: Typowy model głębokiego tłoczenia blachy

matrycę i zadając przemieszczenie stempła. Przy modelowaniu dociskacza są dwie możliwości: zadanie określonej szczeliny pomiędzy dociskaczem a matrycą lub pozostawienie swobody ruchu dociskacza przy zadanej sile dociskacza. W przypadku sterowania obciążeniem dociskacza w modelu dynamicznym konieczne jest wprowadzenie odpowiedniego tłumienia w celu eliminacji oscylacji i uzyskanie możliwie stałej wartości siły oddziaływania między blachą i dociskaczem. W przypadku sztywnego dociskacza można założyć, że jego ruch jest ograniczony do ruchu postępowego, albo też uwzględnić również możliwość jego obrotu na skutek nierównoważenia momentów sił oddziaływania z blachą i przyłożonych do dociskacza sił zewnętrznych.

Oddziaływanie kontaktowe między blachą a narzędziami odgrywa kluczową rolę w procesie tłoczenia [32, 36]. W trakcie procesu zmieniają się warunki geometryczne kontaktu. Algorytm kontaktu powinien efektywnie wykrywać kontakt oraz określać wartość sił oddziaływania kontaktowego w kierunku stycznym i normalnym.

Ze względu na sposób traktowania ruchu modele procesu tłoczenia można podzielić na quasi-statyczne i dynamiczne. W modelach dynamicznych uwzględnia się efekty inercyjne, a w modelach quasi-statycznych zaniedbuje się je. Stosowanie modelu quasi-statycznego jest uzasadnione w przypadku stosunkowo wolnych procesów kształtowania.

W przypadku modelu dynamicznego ze względu na efektywność obliczeniową rozwiązanie wykorzystujące jawne całkowanie równań ruchu względem czasu według równań (130)–(132) zyskało dużą popularność w zastosowaniu do symulacji procesów tłoczenia. W przypadku modelu quasi-statycznego preferowane są niejawne metody rozwiązania zagadnienia nieliniowego, aczkolwiek możliwe jest również wykorzystanie jawnego schematu rozwiązania, np. [16].

Chociaż rozwiązania niejawne uznawane są za dokładniejsze niż rozwiązania jawne, porównanie różnych rozwiązań jawnych i niejawnych z wynikami eksperymentalnymi [15, 35] pokazuje, że rozwiązania jawne nie ustępują dokładnością rozwiązaniom niejawnym. W przypadku dużych zagadnień zalety metod jawnych, takie jak wysoka efektywność rozwiązania dla pojedynczego kroku, nieiteracyjny schemat rozwiązania oraz małe wymagania pamięci przeważają na wadami tych metod, jak np. warunkowa stabilność i sprawiają, że metody jawne dominują w komercyjnych programach do symulacji tłoczenia blach [27, 9].

Efektywność obliczeniowa metod jawnych w zastosowaniu do procesów tłoczenia blach może być zwiększona poprzez algorytmiczne skalowanie masy lub zwiększenie prędkości narzędzi w procesie kształtowania. Obydwie metody zwiększają efekty inercyjne. Wychodzi się z założenia, że w stosunkowo wolnych procesach kształtowania efekty inercyjne są tak małe, że nawet ich zwiększenie nie wprowadza dużych zmian do rozwiązania. Należy jednak pamiętać, że zwiększenie efektów inercyjnych, na skutek skalowania masy lub skalowania prędkości, jest dopuszczalne jedynie w pewnych granicach [5].

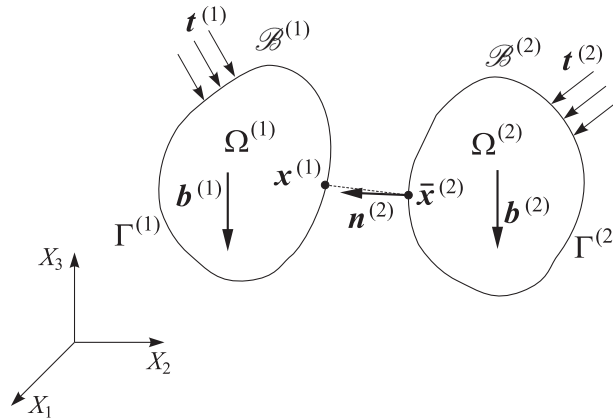
Blacha w procesie tłoczenia poddana jest złożonemu procesowi odkształcania, charakteryzującemu się dużymi przemieszczeniami i dużymi odkształceniami. W modelu numerycznym blacha jest zdyskretyzowana elementami skończonymi bryłowymi lub powłokowymi [25, 8]. Elementy skończone użyte do dyskretyzacji blachy powinny dobrze modelować złożony stan odkształcania blachy, a jednocześnie muszą się charakteryzować dużą efektywnością obliczeniową. Elementy powłokowe aczkolwiek oparte na uproszczonej kinematyce są efektywniejsze obliczeniowo i dominują w praktycznych zastosowaniach symulacji numerycznej procesów tłoczenia blach.

Do dyskretyzacji blachy użyto trójkątny element powłokowy Basic Shell Triangle {BST}. Element BST ma po trzy przemieszczeniowe stopnie swobody w węźle, co zapewnia dużą efektywność obliczeniową i czyni go odpowiednim do stosowania w dużych modelach przemysłowych procesów tłoczenia blach.

Modelowanie odkształcania materiału w procesie tłoczenia wymaga stosowania odpowiednich modeli konstytutywnych [25]. Wytworzona w trakcie walcowania tekstura materiału blachy sprawia, że własności blachy cechują się anizotropowością, która musi być uwzględniona w sformułowaniu teoretycznym. Do opisu zachowania materiału w procesie tłoczenia zastosowano model materiału sprężysto-plastycznego z anizotropowym kryterium uplastycznienia materiału według Hilla [12].

1.2 Sformułowanie zagadnienia kontaktowego

Niniejszy rozdział zawiera podstawy teoretyczne modeli zastosowanych w niniejszej pracy do symulacji tłoczenia blach. Z punktu widzenia mechaniki proces tłoczenia możemy traktować jako zagadnienie kontaktowe. Zagadnienie kontaktowe zostanie sformułowane dla układu dwóch odkształcalnych ciał $\mathcal{B}^{(1)}$ i $\mathcal{B}^{(2)}$, które mogą się ze sobą kontaktować (rys. 2). Ciała poddane są działaniu sił objętościowych $\mathbf{b}^{(a)}$ oraz powierzchniowych $\mathbf{t}^{(a)}$, $a = 1, 2$, podlegając odkształceniu w przedziale czasu $[0, T]$. Każde z dwóch ciał $\mathcal{B}^{(a)}$, $a = 1, 2$, zajmuje w



Rysunek 2: Układ potencjalnie kontaktujących się ciał odkształcalnych.

chwili $t \in [0, T]$ obszar $\Omega^{(a)t}$ ograniczony brzegiem $\Gamma^{(a)t}$. Zakłada się, że w każdym punkcie brzegu ciała $\Gamma^{(a)}$, $a = 1, 2$, można zdefiniować jednoznacznie jednostkowy wektor normalny do brzegu, skierowany na zewnątrz $\mathbf{n}^{(a)}$.

Położenie dowolnego punktu materialnego ciała $\mathcal{B}^{(a)}$, $a = 1, 2$, rozpatrywane w inercyjnym kartezjańskim układzie odniesienia w konfiguracji materialnej, jest określone przez wektor $\mathbf{X}^{(a)}$, położenie punktu materialnego w konfiguracji odkształconej jest dane wektorem $\mathbf{x}^{(a)}$, a jego przemieszczenie – wektorem $\mathbf{u}^{(a)}$

$$\mathbf{u}^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}, t) = \mathbf{x}^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}, t) - \mathbf{X}^{(a)}. \quad (1)$$

Założymy, że w początkowej chwili $t = 0$ ciała $\mathcal{B}^{(1)}$ i $\mathcal{B}^{(2)}$ są rozłączne

$$\Omega^{(1)0} \cap \Omega^{(2)0} = \emptyset. \quad (2)$$

Kontakt mechaniczny zachodzi, gdy dwa ciała fizycznie oddziałują poprzez swoje powierzchnie brzegowe. Oznacza to, że zachodzi

$$\Gamma_c^t = \Gamma^{(1)t} \cap \Gamma^{(2)t} \neq \emptyset. \quad (3)$$

Wspólna część brzegów dwóch ciał Γ_c^t jest zwana powierzchnią kontaktu. Na części pozostałego brzegu $\Gamma^{(a)t} \setminus \Gamma_c^t$, $a = 1, 2$, wyróżnimy część $\Gamma_u^{(a)t}$, na której są zadane przemieszczenia i $\Gamma_\sigma^{(a)t}$, podlegające zadanym obciążeniom. Podsumowując, brzeg $\Gamma^{(a)t}$ składa się z części $\Gamma_u^{(a)t}$, $\Gamma_\sigma^{(a)t}$ i Γ_c^t

$$\Gamma^{(a)t} = \bar{\Gamma}_u^{(a)t} \cup \bar{\Gamma}_\sigma^{(a)t} \cup \bar{\Gamma}_c^t. \quad (4)$$

Zakłada się ponadto, że części brzegu $\Gamma_u^{(a)t}$, $\Gamma_\sigma^{(a)t}$ i Γ_c^t są rozłączne

$$\Gamma_u^{(a)t} \cap \Gamma_\sigma^{(a)t} = \Gamma_\sigma^{(a)t} \cap \Gamma_c^t = \Gamma_u^{(a)t} \cap \Gamma_c^t = \emptyset. \quad (5)$$

Powierzchnia kontaktu zazwyczaj nie jest znana *a priori* – strefa kontaktu musi być znaleziona w każdej konfiguracji odkształconej. Do badania kontaktu wygodne jest wprowadzenie funkcji g określającej odstęp między dwoma ciałami mierzony od określonego punktu na powierzchni jednego z ciał

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) = (\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \cdot \mathbf{n}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}), \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma^{(1)t}$ i

$$\bar{\mathbf{x}}^{(2)} \in \Gamma^{(2)t} : \quad \|\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}\| = \min_{\mathbf{x}^{(2)} \in \Gamma^{(2)t}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|. \quad (7)$$

Definicja (7) określa, że punkt $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ jest punktem najbliższym położonym od rozpatrywanego punktu $\mathbf{x}^{(1)}$ spośród wszystkich punktów powierzchni $\Gamma^{(2)t}$. Tak zdefiniowana funkcja musi być nieujemna

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) \geq 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma^{(1)t}, \quad (8)$$

w tym dla strefy kontaktu

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t, \quad (9)$$

a poza obszarem kontaktu

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) > 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma^{(1)t} - \Gamma_c^t. \quad (10)$$

W sformułowaniu ciągłym problemu kontaktu wystarczy ograniczyć penetrację punktów należących do brzegu jednego z ciał przez powierzchnię brzegową drugiego ciała, dlatego nie jest konieczne definiowanie funkcji $g(\mathbf{x}^{(2)})$.

Ograniczenia kontaktowe dotyczą również oddziaływania kontaktujących się ciał. Oddziaływanie \mathbf{t}_c jednego z ciał na drugie można rozłożyć na dwie składowe – normalną \mathbf{t}_n i styczną \mathbf{t}_s do powierzchni styku

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_s = t_n \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{t}_s. \quad (11)$$

W standardowym sformułowaniu zagadnienia kontaktowego nie uwzględniającym sił adhezji (lub kohezji) oddziaływanie w kierunku normalnym do powierzchni styku ma charakter nacisku. Przy przyjętym zwrocie wektora normalnego wartość nacisku jest niedodatnia w obszarze kontaktu

$$t_n \leq 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t \quad (12)$$

i znika poza obszarem kontaktu

$$t_n = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_u^{(1)t} - \Gamma_c^t. \quad (13)$$

Ograniczenia dla funkcji odstepu między ciałami i oddziaływania w kierunku normalnym można zebrać w następującej postaci [18, 34]:

$$g \geq 0, \quad t_n \leq 0, \quad t_n g = 0. \quad (14)$$

Warunki (14) są znane jako warunki Kuhna-Tuckera dla kontaktu w kierunku normalnym.

Oddziaływanie kontaktowe w kierunku stycznym \mathbf{t}_s , powodowane tarcie, przeciwdziała poślizgowi charakteryzowanemu przez względną prędkość w punkcie styku \mathbf{v}_s . Przyjmując $g = 0$ i $\dot{g} = 0$ prędkość poślizgu w punkcie $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ pokrywającym się z punktem $\mathbf{x}^{(1)}$ jest dana równaniem

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) - \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}). \quad (15)$$

Zagadnienie tarcia można sformułować analogicznie do zagadnienia plastyczności z niestowarzyszonym prawem płynięcia [20]. Przy założonym modelu tarcia Coulomba zagadnienie tarcia można opisać przez następujący układ równań [19, 18, 29, 34]:

- funkcja poślizgu

$$\phi = ||\mathbf{t}_s|| - \mu |t_n|, \quad (16)$$

gdzie μ oznacza współczynnik tarcia Coulomba,

- prawo poślizgu

$$\mathbf{v}_s = -\lambda \frac{\mathbf{t}_s}{||\mathbf{t}_s||}, \quad (17)$$

- warunki Kuhna-Tuckera określające warunki poślizgu, przylegania i wzajemnego wykluczania się przylegania i poślizgu

$$\phi \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \phi \lambda = 0. \quad (18)$$

Sformułowanie lokalne zagadnienia brzegowo-początkowego dla układu dwóch kontaktujących się ciał odkształcalnych $\mathcal{B}^{(a)}$, $a = 1, 2$, dane jest przez następujący układ równań:

- zasada zachowania masy

$$\rho^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}, t) J(\mathbf{X}^{(a)}, t) = \rho_0^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}), \quad \mathbf{X}^{(a)} \in \Omega^{(a)0}, \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

- równania ruchu (równania Cauchy'ego)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(a)} + \rho^{(a)} \mathbf{b}^{(a)} = \rho^{(a)} \mathbf{a}^{(a)}, \quad \mathbf{x}^{(a)} \in \Omega^{(a)t}, \quad t \in [0, T], \quad (20)$$

- naprężeniowe warunki brzegowe

$$\mathbf{n}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(a)} = \mathbf{t}^{(a)}, \quad \mathbf{x}^{(a)} \in \Gamma_\sigma^{(a)t}, \quad t \in [0, T], \quad (21)$$

- przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$\mathbf{u}^{(a)} = \bar{\mathbf{u}}^{(a)}, \quad \mathbf{x}^{(a)} \in \Gamma_u^{(a)t}, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

- warunki początkowe

$$\mathbf{u}^{(a)} = \mathbf{u}_0^{(a)}, \quad \mathbf{v}^{(a)} = \mathbf{v}_0^{(a)}, \quad \mathbf{X}^{(a)} \in \bar{\Omega}^{(a)0}, \quad t = 0, \quad (23)$$

- warunki kontaktu w kierunku normalnym

$$g \geq 0, \quad t_n \leq 0, \quad t_n g = 0, \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t, \quad t \in [0, T], \quad (24)$$

- warunki kontaktu w kierunku stycznym

$$\mathbf{v}_s = -\lambda \frac{\mathbf{t}_s}{\|\mathbf{t}_s\|}, \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t, \quad t \in [0, T], \quad (25)$$

$$\phi = \|\mathbf{t}_s\| - \mu |t_n| \leq 0, \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t, \quad t \in [0, T], \quad (26)$$

$$\lambda \geq 0, \quad \phi \lambda = 0, \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t, \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

Celem analizy jest wyznaczenie pola przemieszczenia $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ spełniającego układ równań (19)–(27). Układ równań (19)–(27) musi być uzupełniony równaniem konstytutywnym pozwalającym wyznaczyć $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$.

1.3 Zasada prac przygotowanych dla zagadnienia kontaktowego

Sformułowanie wariacyjne równoważne problemowi danemu układem równań i nierówności (19)–(27) można uzyskać stosując zasadę prac przygotowanych. Zasada prac przygotowanych dla układu dwóch ciał odkształcalnych, z uwzględnieniem pracy przygotowanej oddziaływania kontaktowego δW_c ma następującą postać [18, 34]:

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^2 \left(\int_{\Omega^{(a)t}} \rho^{(a)} \ddot{\mathbf{u}}^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Omega + \int_{\Omega^{(a)t}} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)} d\Omega - \int_{\Omega^{(a)t}} \rho \mathbf{b}^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Omega - \int_{\Gamma_s^{(a)t}} \mathbf{t}^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Gamma \right) + \\ & \underbrace{- \sum_{a=1}^2 \left(\int_{\Gamma_c^t} \mathbf{t}_c^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Gamma \right)}_{\delta W_c} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie $\mathbf{t}_c^{(a)}$, $a = 1, 2$, są intensywnościami oddziaływania kontaktowego spełniającymi warunki kontaktowe, a $\delta \mathbf{u}^{(a)}$, $a = 1, 2$, są wirtualnymi przemieszczeniami spełniającymi przemieszczeniowe warunki brzegowe.

Ostatni człon w równaniu (28), wyrażający pracę wirtualną sił kontaktu, można przekształcić w następujący sposób [18]:

$$\begin{aligned} \delta W_c &= - \sum_{a=1}^2 \left(\int_{\Gamma_c^t} \mathbf{t}_c^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Gamma \right) = - \int_{\Gamma_c^t} \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(1)} d\Gamma - \int_{\Gamma_c^t} \mathbf{t}_c^{(2)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(2)} d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_c^t} \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot [\delta \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) - \delta \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}))] d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_c^t} (t_n \delta g + \mathbf{t}_s \delta \mathbf{u}_s) d\Gamma. \end{aligned} \quad (29)$$

Równanie (28) określa stan równowagi dynamicznej poprzez warunek równości prac przygotowanych sił wewnętrznych i zewnętrznych. Równanie zasady prac przygotowanych uwzględnia warunki brzegowe, warunki brzegowe przemieszczeniowe są uwzględnione poprzez założenie kinematycznej dopuszczalności pola $\delta \mathbf{u}^{(a)}$, a warunki brzegowe naprężeniowe poprzez włączenie pracy przygotowanej obciążenia na brzegu do zewnętrznej pracy przygotowanej. W podobny sposób uwzględnione są również przemieszczeniowe i obciążeniowe warunki kontaktu.

Równanie (28) stanowi wygodną bazę teoretyczną do rozwinięcia sformułowań metody elementów skończonych (MES). Równania MES są równaniami macierzowymi, dlatego w celu ułatwienia dalszych przekształceń równanie (28) zostanie zapisane w notacji macierzowej:

$$\sum_{a=1}^2 \left(\int_{\Omega^{(a)t}} \delta \mathbf{u}^{(a)\top} \rho^{(a)} \ddot{\mathbf{u}}^{(a)} d\Omega + \int_{\Omega^{(a)t}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)\top} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} d\Omega - \int_{\Omega^{(a)t}} \delta \mathbf{u}^{(a)\top} \rho \mathbf{b}^{(a)} d\Omega - \int_{\Gamma_s^{(a)t}} \delta \mathbf{u}^{(a)\top} \mathbf{t}^{(a)} d\Gamma \right) + \sum_{a=1}^2 \left(\int_{\Gamma_c^t} \delta \mathbf{u}^{(a)\top} \mathbf{t}_c^{(a)} d\Gamma \right) = 0, \quad (30)$$

gdzie tensor naprężenia Cauchy'ego i tensor małych odkształceń są reprezentowane przez wektory $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$, które mają następujące składowe:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23} \}^T \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23} \}^T. \quad (32)$$

1.4 Dyskretyzacja przestrzenna MES zagadnienia kontaktowego

Równania ruchu w metodzie elementów skończonych są zwykle otrzymywane w postaci semidyskretnej poprzez wprowadzenie dyskretyzacji przestrzennej w słabym sformułowaniu zagadnienia ruchu. Dyskretyzacji przestrzennej objętości $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ dokonujemy dzieląc ją na n_{el} nie pokrywających się elementów

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{e=n_{el}} \Omega_e \quad (33)$$

Zakładamy, że kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczenia może być interpolowane jako

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad (34)$$

gdzie \mathbf{N} jest macierzą funkcji interpolacyjnych (funkcji kształtu), a \mathbf{r}_e jest wektorem uogólnionych parametrów węzłowych. W ogólnym przypadku uogólnione parametry węzłowe mogą mieć charakter przemieszczeń lub innych wielkości np. obrotów. Zakłada się, że funkcje kształtu zapewniają kinematyczną dopuszczalność pola przemieszczenia (włącznie z ciągłością) dla dowolnych wartości uogólnionych parametrów węzłowych. Wariacja pola przemieszczenia jest dana wyrażeniem

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (35)$$

Związek między liniowymi odkształceniami $\boldsymbol{\varepsilon}$ i przemieszczeniami w notacji algebraicznej można zapisać jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (36)$$

gdzie \mathbf{L} jest macierzą-operatorem zdefiniowaną w następujący sposób

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Wariacje liniowego odkształcenia przy uwzględnieniu równań (36), (34) i (35) można zapisać w następującej postaci:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad (38)$$

gdzie macierz-operator \mathbf{B} jest dana wzorem

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}. \quad (39)$$

Wprowadzając dyskretyzację przestrzenną obszarów $\Omega^{(1)}$ i $\Omega^{(2)}$ zgodnie z równaniami (33) i (34), aproksymuje się powierzchnie brzegowe kontaktujących się ciał przez zbiór elementów skończonych, które mogą być krawędziami lub ścianami elementów skończonych dyskretyzujących wnętrza ciał:

$$\tilde{\Gamma}^{(a)} = \bigcup_{e=1}^{n_e^{(a)}} \Gamma_e^{(a)}, \quad (40)$$

gdzie $\tilde{\Gamma}^{(a)}$ jest aproksymacją powierzchni $\Gamma^{(a)}$, $a = 1, 2$, zaś $n_e^{(a)}$ jest liczbą elementów użytych w aproksymacji. Powierzchnia ciała jest interpolowana za pomocą standardowych funkcji kształtu

$$\mathbf{x}^{(a)} = \sum_{i=1}^{n_{ns}} N_i(\mathbf{x}^{(a)}) \mathbf{x}_i^{(a)}, \quad \mathbf{x}^{(a)} \in \Gamma_e^{(a)}, \quad (41)$$

gdzie $\Gamma_e^{(a)}$ jest powierzchnią pewnego elementu dyskretyzującego brzeg $\Gamma^{(a)}$, $a = 1, 2$, $\mathbf{x}_i^{(a)}$ to współrzędne węzłów definiujących element skończony, N_i – funkcje kształtu, n_{ns} jest liczbą węzłów definiujących element skończony. W algorytmie implementowanym w niniejszej pracy powierzchnie kontaktowe są aproksymowane trójkątami lub czworokątami, a w zagadnieniach dwuwymiarowych dwuwęzłowymi segmentami liniowymi.

W sformułowaniu dyskretnym warunki kontaktowe określa się nieraz dla powierzchni aproksymowanych [19]. Najczęściej jednak warunki kontaktowe są określone tylko dla węzłów, co pozwala uniknąć całkowania po powierzchni kontaktu. Podejście to jest wykorzystywane w niniejszej pracy. Doświadczenie pokazuje, że przy odpowiednio gęstej dyskretyzacji jest ono wystarczająco dokładne. Kontakt określa się badając położenie węzłów dyskretyzujących jedną z powierzchni względem aproksymacji drugiej powierzchni. W tym kontekście funkcja odstępu/penetracji (6) jest zdefiniowana dla danego węzła $\mathbf{x}_s^{(1)}$

$$g(\mathbf{x}_s^{(1)}) = (\mathbf{x}_s^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \cdot \mathbf{n}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}), \quad (42)$$

gdzie $\mathbf{x}_s^{(1)} \in \mathcal{G}^{(1)}$ oraz

$$\bar{\mathbf{x}}^{(2)} \in \bar{\Gamma}^{(2)} : \quad \|\mathbf{x}_s^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}\| = \min_{\mathbf{x}^{(2)} \in \bar{\Gamma}^{(2)}} \|\mathbf{x}_s^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|, \quad (43)$$

gdzie $\mathcal{G}^{(1)}$ jest skończonym zbiorem punktów dyskretyzujących powierzchnię $\Gamma^{(1)}$, a $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ jest najbliższym punktem na aproksymacji powierzchni $\Gamma^{(2)}$.

W sformułowaniu dyskretnym zagadnienia kontaktowego warunki (14) są zapisane dla każdego węzła ze zbioru $\mathcal{G}^{(1)}$ w następującej postaci:

$$\bar{g}(\mathbf{x}_s^{(1)}) \geq 0, \quad F_n(\mathbf{x}_s^{(1)}) \leq 0, \quad F_n(\mathbf{x}_s^{(1)})\bar{g}(\mathbf{x}_s^{(1)}) = 0, \quad (44)$$

gdzie $F_n(\mathbf{x}_s^{(1)})$ jest składową normalną całkowitej siły kontaktu $\mathbf{F}_c^{(1)}$ działającej na węzeł $\mathbf{x}_s^{(1)}$

$$\mathbf{F}_c^{(1)} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_s = F_n \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{F}_s, \quad (45)$$

\mathbf{F}_s – składowa styczna siły kontaktu, $\mathbf{n}^{(2)}$ – jednostkowy wektor normalny do aproksymowanej powierzchni kontaktowej $\Gamma^{(2)}$. Siły kontaktu zastępują powierzchniowe oddziaływanie kontaktowe w pewnym otoczeniu węzła.

Spełnienie warunku (44)₁ w ogólnym przypadku nie wyklucza penetracji węzłów dyskretyzujących powierzchnię $\Gamma^{(2)}$ przez aproksymację powierzchni $\Gamma^{(1)}$. W sformułowaniu dyskretnym warunek braku penetracji należy sprawdzić obustronnie, albo dopuścić pewną penetrację węzłów jednej z powierzchni.

W sformułowaniu dyskretnym zagadnienia kontaktowego warunki przylegania/poślizgu (16)–(18) są również określone dla węzłów:

$$\phi = \|\mathbf{F}_s\| - \mu |F_n|, \quad (46)$$

$$\mathbf{v}_s = -\lambda \frac{\mathbf{F}_s}{\|\mathbf{F}_s\|}, \quad (47)$$

$$\phi \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \phi \lambda = 0. \quad (48)$$

Całkowita praca przygotowania oddziaływania kontaktowego δW_c w sformułowaniu dyskretnym może być określona jako suma prac przygotowanych $(\delta w_c)_i$ sił kontaktu w poszczególnych węzłach

$$\delta W_c = \sum_{i=1}^{n_c} (\delta w_c)_i \quad (49)$$

gdzie n_c jest liczbą węzłów znajdujących się w kontakcie w danej chwili.

Praca przygotowana sił kontaktu w jednym węźle δw_c może być wyznaczona z zależności analogicznej do równania (29)

$$\delta w_c = -\mathbf{F}_c^{(1)} \cdot (\delta \mathbf{u}^{(1)} - \delta \bar{\mathbf{u}}^{(2)}), \quad (50)$$

$\delta \mathbf{u}^{(1)}$ – przemieszczenia przygotowane badanego węzła, a $\delta \bar{\mathbf{u}}^{(2)}$ – przemieszczenia przygotowane rzutu badanego węzła na aproksymowaną powierzchnię drugiego ciała.

Biorąc równanie (41) przemieszczenie przygotowane punktu $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ można zapisać w następującej postaci:

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_{ns}} N_i(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \delta \mathbf{u}_i^{(2)} \quad (51)$$

Wstawiając (51) do (50) otrzymuje się

$$\delta w_c = \mathbf{F}_c^{(1)} \cdot \left(-\delta \mathbf{u}^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_{ns}} N_i(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \delta \mathbf{u}^{(2)} \right) \quad (52)$$

co można przedstawić jako

$$\delta w_c = \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{f}_c, \quad (53)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_c = \{ \mathbf{u}^{(1)} \quad \mathbf{u}_1^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{n_{ns}}^{(2)} \}^T \quad (54)$$

$$\mathbf{f}_c = \{ -\mathbf{F}_c^{(1)} \quad N_1(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \mathbf{F}_c^{(1)} \quad \dots \quad N_{ns}^n(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \mathbf{F}_c^{(1)} \}^T. \quad (55)$$

Wstawiając zależności dyskretizacyjne do równania (28), zasadę prac przygotowanych dla dyskretizowanego zagadnienia kontaktowego można zapisać w następującej postaci, porównaj równanie (57):

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left(\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e \right) \ddot{\mathbf{r}}_e + \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \right) \\ & - \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega_e \right) - \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left(\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e \right) - \sum_{i=1}^{n_c} \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{f}_c = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Równanie (56) można zapisać w następującej postaci

$$(\delta \mathbf{r})^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{cont}}) = 0, \quad (57)$$

gdzie wprowadzono definicje globalnej macierzy mas \mathbf{M} , globalnych wektorów uogólnionych parametrów (przemieszczeń) węzłowych \mathbf{r} oraz węzłowych sił wewnętrznych, zewnętrznych i kontaktowych, \mathbf{F}^{int} , \mathbf{F}^{ext} i \mathbf{F}^{cont} , które otrzymuje się poprzez złożenie macierzy mas \mathbf{m}_e oraz odpowiednich elementowych wektorów \mathbf{r}_e , $\mathbf{f}_e^{\text{int}}$, $\mathbf{f}_e^{\text{ext}}$ i \mathbf{f}_c :

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{F}^{\text{int}} = \mathbf{A} \mathbf{f}_e^{\text{int}}, \quad \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{A} \mathbf{f}_e^{\text{ext}}, \quad \mathbf{F}^{\text{cont}} = \mathbf{A} \mathbf{f}_c^c, \quad \mathbf{M} = \mathbf{A} \mathbf{m}_e, \quad (58)$$

gdzie \mathbf{A} jest standardowym operatorem agregacji globalnych wektorów i macierzy (zob. [13]), a elementowy wektor sił wewnętrznych $\mathbf{f}_e^{\text{int}}$, elementowy wektor sił zewnętrznych $\mathbf{f}_e^{\text{ext}}$ oraz elementowa macierz mas \mathbf{m}_e są dane następującymi wzorami:

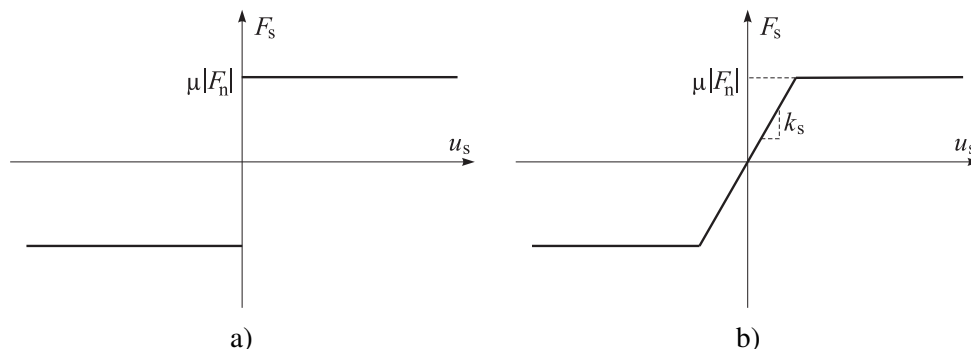
$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e, \quad (59)$$

$$\mathbf{f}_e^{\text{ext}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e, \quad (60)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e. \quad (61)$$

Równanie skalarne (57) musi być spełnione dla dowolnych wariacji przemieszczeń węzłowych $\delta \mathbf{r}$, skąd wynika, że musi być spełniony następujący układ równań

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{cont}} = 0, \quad (62)$$



Rysunek 3: Zależność siły tarcia od poślizgu: a) prawo Coulomba, b) regularyzowane prawo Coulomba.

lub, w innej postaci

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{cont}}. \quad (63)$$

Równania (62) lub (63) są dyskretyzowanymi przestrzennie równaniami ruchu (lub równowagi dynamicznej) będącymi podstawowymi równaniami stosowanej w niniejszej pracy metody elementów skończonych. Składowe wektora sił kontaktowych muszą spełniać warunki kontaktowe dane równaniami (44), (46) i (48).

1.5 Regularyzacja ograniczeń kontaktowych

Rozwiązanie zagadnienia ruchu opisanego równaniem (63) z ograniczeniami kontaktowymi (44), (46) i (48) może być uzyskane za pomocą następujących metod [18, 34]:

- nieoznaczonych mnożników (czynników) Lagrange'a,
- metody funkcji kary,
- rozszerzonej metody mnożników Lagrange'a (będącej kombinacją zwykłej metody mnożników Lagrange'a i metody funkcji kary).

W sformułowaniu przyjętym w projekcie Numpress stosuje się metodę funkcji kary. W sformułowaniach jawnych metody elementów skończonych jest to metoda najczęściej stosowana ze względu na łatwość jej implementacji w jawnym schemacie rozwiązania równań ruchu. W metodzie funkcji kary ograniczenia kontaktu są spełnione tylko w sposób przybliżony, dopuszcza się nieznaczne naruszenie więzów. Metoda funkcji kary jest również metodą regularyzacji warunków kontaktowych, gdyż usuwa niejednoznaczność zależności oddziaływania kontaktowego od wielkości geometrycznych.

Metoda funkcji kary dla kontaktu w kierunku normalnym sprowadza się do przyjęcia następującej zależności liniowej dla nacisku F_n

$$F_n = k_n \bar{g}, \quad (64)$$

gdzie k_n jest parametrem kary. Warunek (44)₂ w dalszym ciągu obowiązuje, co oznacza, że zależność (64) jest określona tylko dla $\bar{g} < 0$. W ten sposób naruszone zostaje ograniczenie kinematyczne dla kontaktu w kierunku normalnym (44)₁. Ujemny odstęp \bar{g} , który może wystąpić między kontaktującymi się ciałami, będzie nazwany penetracją. W interpretacji fizycznej metoda funkcji kary jest równoważna wstawieniu pomiędzy kontaktujące się ciała elementów sprężystych przeciwdziałających penetracji, parametr k_n jest sztywnością tych sprężyn.

Zastosowana regularyzacja ograniczeń kontaktowych (46)–(48) dla tarcia polega na dopuszczeniu poślizgu dla siły tarcia mniejszej od wartości granicznej. Może to być uzasadnione

fizycznie jako uwzględnienie mikropoślizgów w obszarze kontaktów dla tarcia nierozwiniętego. Klasyczny model tarcia Coulomba można traktować jako analogię do modelu sztywno-idealnie plastycznego materiału, zaś regularyzowany model tarcia Coulomba można uznać jako analogiczny do sprężysto-plastycznego modelu materiału (rys. 3). Prędkość poślizgu \mathbf{v}_s może być rozłożona na część odwracalną (sprężystą) $\mathbf{v}_s^{(el)}$ i nieodwracalną (plastyczną) $\mathbf{v}_s^{(pl)}$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^{(el)} + \mathbf{v}_s^{(pl)}. \quad (65)$$

Sprężysta część jest określana przy wykorzystaniu warunku

$$\mathbf{v}_s^{(el)} = \frac{\mathbf{F}_s}{k_s} \quad \text{jeśli} \quad \phi < 0. \quad (66)$$

Widać z powyższego, że k_s spełnia rolę analogiczną do modułu Younga (rys. 3). Niesprężysta część prędkości poślizgu jest wyznaczona z wyrażenia (17), które teraz określa jedynie część niesprężystą prędkości poślizgu

$$\mathbf{v}_s^{(pl)} = \lambda \frac{\mathbf{F}_s}{\|\mathbf{F}_s\|} \quad \text{jeśli} \quad \phi = 0. \quad (67)$$

1.6 Obliczanie sił oddziaływania kontaktowego

Dla węzłów, dla których stwierdza się istnienie kontaktu ($\bar{g} < 0$), oblicza się składową normalną i styczną oddziaływania kontaktowego na podstawie związków przedstawionych w podrozdziale 1.5. Siłę oddziaływania w kierunku normalnym F_n oblicza się na podstawie równania (64). Wielkość penetracji węzłów naruszających ograniczenia kontaktowe zależy od wartości parametru kary k_n . Aby zminimalizować penetracje parametr kary powinien być możliwie duży, niemniej jednak zbyt duża wartość parametru kary może wpłynąć na zmniejszenie krytycznego kroku całkowania. Wartość parametru kary może być przyjęta na podstawie lokalnej sztywności kontaktujących się ciał, np. [10]. Parametr kary w implementowanym algorytmie kontaktu ustala się na podstawie kryterium stabilności dla układu masy m ze sprężyną o sztywności k_n . Masa jest masą skupioną w węźle będącym w kontakcie, a sztywność sprężyny reprezentuje parametr kary. Maksymalną wartość parametru kary ustala się tak by nie został zmniejszony krok całkowania całego układu dyskretnego Δt . Korzystając z równania (133) i uwzględniając częstość drgań własnych układu masy ze sprężyną

$$\omega = \sqrt{\frac{k_n}{m}}, \quad (68)$$

stabilny parametr kary jest dany przez nierówność

$$k_n \leq \frac{4m}{\Delta t^2}. \quad (69)$$

Przyjęty model jest ścisły dla przypadku kontaktu jednostronnego (kontaktu odkształcalnego ciała ze sztywną powierzchnią). Stanowi on również dobre oszacowanie dla kontaktu dwóch ciał odkształcalnych.

Analogia między modelem tarcia a modelem plastyczności pozwala nam zastosować algorytm wyznaczania siły tarcia analogiczny do wyznaczania naprężenia w materiale sprężysto-plastycznym. Schemat tego algorytmu jest przedstawiony poniżej.

(i) Obliczenie granicznej siły tarcia

$$F_s^{\max} = \mu |F_n|. \quad (70)$$

(ii) Obliczenie przyrostowego poślizgu

$$\Delta \mathbf{u}_{\text{slip}} = \mathbf{v}_s \Delta t . \quad (71)$$

(iii) Obliczenie próbnej siły tarcia

$$\mathbf{F}_s^* = \mathbf{F}_s^{\text{old}} + k_s \Delta \mathbf{u}_{\text{slip}} , \quad (72)$$

$$\mathbf{F}_s^{\text{trial}} = \mathbf{F}_s^* - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_s^*) , \quad (73)$$

$\mathbf{F}_s^{\text{old}}$ jest siłą tarcia wyznaczoną w poprzednim kroku.

(iv) Obliczenie nowej siły tarcia

$$\mathbf{F}_s^{\text{new}} = \begin{cases} \mathbf{F}_s^{\text{trial}} & \text{dla } \|\mathbf{F}_s^{\text{trial}}\| \leq F_s^{\text{max}} , \\ F_s^{\text{max}} \frac{\mathbf{F}_s^{\text{old}}}{\|\mathbf{F}_s^{\text{old}}\|} & \text{dla } \|\mathbf{F}_s^{\text{trial}}\| > F_s^{\text{max}} . \end{cases} \quad (74)$$

1.7 Dyskretne równania ruchu z uwzględnieniem tłumienia

Tłumienie można uwzględnić jako część wewnętrznych sił węzłowych lub wprowadzić je jawnie do równań ruchu (63) przez dodanie członu $\mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}$ reprezentującego siły tłumienia

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{cont}} . \quad (75)$$

Macierz tłumienia \mathbf{C} może być przyjęta jako proporcjonalna do macierzy bezwładności \mathbf{M}

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{M} \quad (76)$$

Jest to szczególny przypadek tłumienia Rayleigha

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} , \quad (77)$$

gdzie \mathbf{K} jest macierzą sztywności. Tłumienie zdefiniowane równaniem (76) jest otrzymane z wyrażenia (77) przez przyjęcie $\alpha = 0$, co fizycznie oznacza, że wyższe postacie drgań są słabo tłumione [6]. Z drugiej strony przyjęcie $\beta = 0$ i $\alpha \neq 0$ powodowałoby silne tłumienie wyższych częstości drgań. Chociaż macierz sztywności w sformułowaniu jawnym nie jest obliczana, implementacja pełnego tłumienia Rayleigha jest możliwa przy zastosowaniu następującej formuły:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{r}} \approx \frac{\Delta \mathbf{F}^{\text{int}}}{\Delta \mathbf{r}} . \quad (78)$$

1.8 Sformułowanie elementu powłokowego

Blacha w modelu tłoczenia może być dyskretyzowana elementami bryłowymi lub powłokowymi. Elementy powłokowe są znacznie wydajniejsze i one są w praktyce wykorzystywane w modelowaniu procesu tłoczenia. Standardowe elementy skończone stosowane w modelowaniu powłok mają zazwyczaj przemieszczeniowe i obrotowe stopnie swobody [4]. Stopnie swobody o charakterze obrotowym sprawiają spore trudności w analizie problemów z dużymi obrotami – konieczne jest stosowanie specjalnych sformułowań [33].

W niniejszej pracy do dyskretyzacji tłoczonej blachy zastosowano trójkątny element powłokowy bez stopni obrotowych, zwany BST (*ang.* Basic Shell Triangle), którego wersja liniowa została opracowana w [23], a implementacja w nieliniowym sformułowaniu dynamicznym

z jawnym całkowaniem równań ruchu względem czasu została zrealizowana przy współudziale autora [21, 22, 26]. Element BST jest prostym i efektywnym obliczeniowo elementem skończonym, a jednocześnie dającym dokładne wyniki w w skomplikowanych problemach nieliniowych takich jak zagadnienia tłoczenia blach.

Element BST jest oparty na założeniu kinematycznym Kirchhoffa dla powłok, zgodnie z którym prędkość odkształcenia w dowolnym punkcie powłoki $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \{\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}, 2\dot{\epsilon}_{xy}\}^T$ można wyrazić poprzez parametry definiujące prędkość odkształcenia powierzchni środkowej, które jest rozłożone na stan odkształcenia membranowego $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m = \{\dot{\epsilon}_{xx}^m, \dot{\epsilon}_{yy}^m, 2\dot{\epsilon}_{xy}^m\}^T$ oraz stan odkształcenia zgięciowego $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \{\dot{\kappa}_{xx}, \dot{\kappa}_{yy}, 2\dot{\kappa}_{xy}\}^T$:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m + z \dot{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (79)$$

gdzie z jest odległością rozpatrywanego punktu powłoki od jej powierzchni środkowej mierzona wzdłuż osi z lokalnego układu kartezjańskiego $\mathbf{x} = \{xyz\}$, zdefiniowanego na powierzchni środkowej w ten sposób, że osie x i y są styczne do powierzchni środkowej powłoki.

Sformułowanie elementu BST wprowadza dyskretyzację powierzchni środkowej powłoki trójwęzłowymi elementami trójkątnymi ze standardowymi liniowymi funkcjami kształtu $\mathbf{N}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{x}^{(e)}, \quad \mathbf{x} \in A^{(e)}, \quad (80)$$

gdzie $\mathbf{x}^{(e)}$ jest wektorem współrzędnych węzłowych elementu, $A^{(e)}$ jest obszarem elementu. Pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ wewnątrz elementu może być wyrażone w podobny sposób poprzez prędkości węzłowe $\mathbf{v}^{(e)}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{v}^{(e)}, \quad \mathbf{x} \in A^{(e)}. \quad (81)$$

Prędkości odkształcenia membranowego można wyrazić w zależności od prędkości węzłowych w następujący sposób:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m = \mathbf{B}_m \mathbf{v}^{(e)}. \quad (82)$$

Liniowa interpolacja pola prędkości (81) daje stałą prędkość odkształcenia membranowego w elemencie. Macierz-operator \mathbf{B}_m jest tożsąma z macierzą dla elementu o stałym odkształceniu CST (*ang.* Constant Strain Triangle) [17]. Element powłokowy jest elementem mieszanym z niezależnym polem prędkości odkształcenia zgięciowego. Sformułowanie dla części zgięciowej wykorzystuje w sposób typowy dla metody objętości skończonych (*ang.* Finite Volume Method) [24] twierdzenie o dywergencji, z którego uzyskuje się następującą zależność dla prędkości odkształcenia zgięciowego

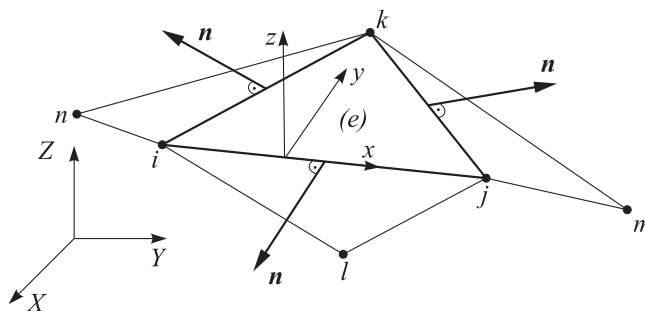
$$\int_{A^{(e)}} \dot{\boldsymbol{\kappa}} dA = \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{Q} \nabla v_z d\Gamma, \quad (83)$$

gdzie

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad \nabla v_z = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{array} \right\}, \quad (84)$$

v_z jest prędkością ugięcia powłoki (normalną do powierzchni środkowej), $\Gamma^{(e)}$ jest brzegiem elementu, n_x i n_y są składowymi jednostkowego wektora normalnego do brzegu elementu wzdłuż osi lokalnych x i y , odpowiednio, por. rys. 4. Zastosowana interpolacja pola prędkości odkształcenia zgięciowego $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ jest nieciągła na brzegach i stała wewnątrz elementu. Uwzględniając to założenie w równaniu (83) otrzymuje się

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{(e)} = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{Q} \nabla v_z d\Gamma. \quad (85)$$



Rysunek 4: Grupa sąsiadujących elementów definiująca element BST.

Równanie (85) wyraża prędkości odkształcenia zgięciowego w funkcji gradientu prędkości ugięcia powłoki wzdłuż brzegów elementu. Całki wzdłuż brzegu elementu w równaniu (85) można obliczyć w sposób jawny przyjmując uśrednioną wartość gradientu prędkości wzdłuż brzegu elementu na podstawie wartości policzonych dla dwu sąsiadujących elementów. W wyniku tego uśrednienia prędkość odkształcenia zgięciowego w elemencie (e) można przedstawić jako

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{(e)} = \mathbf{B}_b \mathbf{v}^{(pe)}, \quad (86)$$

gdzie $\mathbf{v}^{(pe)}$ jest wektorem prędkości węzłów grupy elementów pokazanych na rys. 4, składającej się z elementu (e) i elementów sąsiednich

$$\mathbf{v}^{(pe)} = \{\mathbf{v}_i \ \mathbf{v}_j \ \mathbf{v}_k \ \mathbf{v}_l \ \mathbf{v}_m \ \mathbf{v}_n\}^T. \quad (87)$$

Wstawiając wyrażenia (82) i (86) do równania (79) otrzymuje się prędkość odkształcenia w dowolnym punkcie powłoki w funkcji węzłowych prędkości przemieszczeniowych bez potrzeby stosowania węzłowych prędkości obrotowych. W ten sposób unika się wprowadzenia obrotowych stopni swobody.

1.9 Model konstytutywny materiału

W programie numerycznym implementowano model materiału hiposprężysto-plastycznego dla powłoki dyskretyzowanej elementem BST, opisanym w podrozdziale 1.8, z uwzględnieniem anizotropii właściwości plastycznych. Stworzono również interfejs pozwalający dodatkowo stosować inne modele konstytutywne takie jak Barlat-Lian, Burzyński.

Hiposprężysto-plastyczny model materiału – z anizotropowym warunkiem uplastycznienia Hilla z r. 1948

Hiposprężysto-plastyczny model materiału jest zdefiniowany przez następujący ogólny układ równań:

- Addytywny rozkład tensora prędkości odkształcenia \mathbf{d}

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p. \quad (88)$$

- Hiposprężyste równanie konstytutywne (założono pochodną Jaumanna)

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{d}^e. \quad (89)$$

- Warunek uplastycznienia

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0, \quad (90)$$

gdzie \mathbf{q} oznacza wektor parametrów wewnętrznych.

- Prawo płynięcia

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (91)$$

jeśli $\Phi = f$, mamy do czynienia ze stowarzyszonym prawem płynięcia.

- Prawo umocnienia

$$\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\gamma} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}). \quad (92)$$

- Warunki obciążenia/odciążenia (warunki Kuhna-Tuckera)

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (93)$$

z warunkiem konsystencji

$$\dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0. \quad (94)$$

W sformułowaniu omawianego modelu tensor prędkości deformacji \mathbf{d} jest tożsamy z tensorem $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ obliczanym z równania (79). Addytywny rozkład tensora prędkości deformacji na część sprężystą i plastyczną można zapisać w postaci:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p. \quad (95)$$

Model jest sformułowany dla powłoki, dla której przyjęto hipotezę Kirchhoffa-Love'a. Pozwala to założyć, że w każdym punkcie powłoki panuje płaski stan naprężenia z trzema niezerowymi składowymi tensora naprężenia, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$. Dla opisu deformacji powłoki przyjęto lokalny układ współrzędnych kartezjańskich $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$, którego osie x_1 i x_2 leżą w płaszczyźnie powłoki. Odpowiadający równaniu (89) hiposprężysty związek konstytutywny

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{C}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (96)$$

wiąże przyjętą pochodną obiektywną tensora naprężenia z trzema składowymi części sprężystej tensora prędkości deformacji $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \{\dot{\epsilon}_{11}^e, \dot{\epsilon}_{22}^e, 2\dot{\epsilon}_{12}^e\}^T$. Macierz $\bar{\mathbf{C}}$ jest tensorem modułów sprężystych dla płaskiego stanu naprężenia uwzględniającym założenie o zerowych naprężeniach normalnych do powierzchni środkowej powłoki ($\sigma_{33} = 0$).

W modelu przyjęto anizotropowy warunek uplastycznienia Hilla z r. 1948 [12], które w przypadku płaskiego stanu naprężenia ma następującą postać:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \frac{R_0(1+R_{90})}{R_{90}(1+R_0)}\sigma_{22}^2 - \frac{2R_0}{1+R_0}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{(1+2R_{45})(R_0+R_{90})}{R_{90}(1+R_0)}\sigma_{12}^2} \quad (97)$$

gdzie składowe tensora naprężenia są w osiach zgodnych z kierunkami anizotropii, a parametry R_0 , R_{45} i R_{90} są współczynnikami Lankforda dla kierunków określonych kątami 0° , 45° i 90° względem kierunku walcowania blachy. W modelu założono ponadto izotropowe wzmocnienie z efektywnym odkształceniem plastycznym $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ jako parametrem wewnętrznym ($\mathbf{q} = \{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p\}$).

Jeśli można przyjąć, że właściwości materiału powłoki w jej płaszczyźnie są niezależne od kierunku, natomiast są one znacząco różne od właściwości w kierunku poprzecznym (normalnym) do powierzchni powłoki, można założyć tzw. anizotropię normalną (lub transwersalną). Odpowiadające temu założeniu kryterium Hilla ma następującą postać [12]:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2\bar{R}}{1+\bar{R}}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{2(1+\bar{R})}{1+\bar{R}}\sigma_{12}^2} - \sigma_{pl}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = 0 \quad (98)$$

\bar{R} jest średnim współczynnikiem Lankforda wyznaczonym według wzoru

$$\bar{R} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (99)$$

Dla materiału izotropowego, gdy $\bar{R} = 1$, warunek Hilla (98) jest tożsamy z warunkiem Hubera-Misesa.

Naprężenie uplastyczniające σ_{pl} jest funkcją efektywnego odkształcenia plastycznego $\bar{\epsilon}^p$. W implementowanym modelu funkcję tę można aproksymować przez:

- krzywą potęgową Ludwika-Nadaia

$$\sigma = K(\epsilon_0 + \bar{\epsilon}^p)^n, \quad (100)$$

gdzie K , n i ϵ_0 są stałymi materiałowymi;

Część plastyczną prędkości odkształcenia wyznacza się na podstawie stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (101)$$

gdzie γ mnożnik plastycznego płynięcia, a f funkcja plastyczności określona równaniem (98), przy czym spełnione są warunki (93) i (94).

Prędkość odkształcenia wzdłuż grubości powłoki $\dot{\epsilon}_{33}$ nie wchodzi bezpośrednio do sformułowania. Można ją wyznaczyć w zależności od innych składowych, część sprężystą $\dot{\epsilon}_{33}^e$ ze związku

$$\dot{\epsilon}_{33}^e = -\nu(\dot{\epsilon}_{11}^e + \dot{\epsilon}_{22}^e), \quad (102)$$

a część plastyczną $\dot{\epsilon}_{33}^p$ z warunku niezmienności objętości przy plastycznym płynięciu

$$\dot{\epsilon}_{33}^p = -(\dot{\epsilon}_{11}^p + \dot{\epsilon}_{22}^p). \quad (103)$$

W symulacji tłoczenia blach można przyjąć, że odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe w stosunku do występujących odkształceń plastycznych i zmianę grubości można wyliczać biorąc pod uwagę tylko warunek stałej objętości materiału (elementu).

Jedną z trudności w implementacji numerycznej modelu hiposprężysto-plastycznego jest konieczność stosowania algorytmu całkowania naprężeń zachowującego obiektywność równania konstytutywnego. Uaktualnianie naprężeń wymaga całkowania w punkcie materialnym

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt, \quad (104)$$

Pochodną materialną $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, występującą w równaniu (104), można wyrazić poprzez pochodną Jaumanna $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ w następujący sposób:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\sigma}, \quad (105)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ jest tensorem spinu, pochodną $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ wyznacza się z zależności (96).

Istnieje wiele różnych algorytmów całkowania równania hipoplastycznego, które w przybliżeniu lub w pełni zachowują obiektywność [7]. Głównym problemem w tych algorytmach jest całkowanie obrotu naprężeń [14].

Ze względu na łatwość uaktualniania naprężeń w sformułowaniu modelu hiposprężysto-plastycznego dla elementu powłokowego wygodnie jest przyjąć współobrotowy (korotacyjny) układ współrzędny, obracający się zgodnie ze spinem $\boldsymbol{\omega}$. Pochodna Jaumanna $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ jest równoważna pochodnej względem czasu we współrzędnych korotacyjnych $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_R$, por. [31].

Wobec tego całkowanie hiposprężystego równania konstytutywnego w układzie korotacyjnym może być przeprowadzone w uproszczony sposób:

$$\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{R_n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_R dt, \quad (106)$$

gdzie wszystkie wielkości są wyrażone w układzie korotacyjnym. Stosując w równaniu (106) metodę punktu środkowego, naprężenia próbne w sprężystym predyktorze otrzymuje się z następującej zależności:

$$\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}}^{TR} = \boldsymbol{\sigma}_{R_n} + (\bar{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})_{n+1/2} \Delta t_n. \quad (107)$$

Naprężenia próbne uzyskuje się, zakładając, że przyrost odkształcenia ma charakter sprężysty. Dla tak otrzymanych naprężeń próbnych sprawdza się warunek plastyczności

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}}^{TR}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \leq 0 \quad (108)$$

biorąc funkcję plastyczności f daną równaniem (98). Jeśli warunek (108) jest spełniony przyjmuje się

$$\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}}^{TR}, \quad (109)$$

w przeciwnym wypadku stosuje się do fazy plastycznego korektora, w którym sprowadza się naprężenia na powierzchnię plastyczności. W implementowanym algorytmie wykorzystano procedurę powrotu na powierzchnię plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia rozwiniętą w [30].

Model konstytutywny z warunkiem plastyczności Barlat-Lian

Warunek plastyczności zaproponowany przez Barlata i Liana [1] w 1989 został opracowany do modelowania ortotropowych blach w płaskim stanie naprężenia. W odróżnieniu od innych kryteriów warunek ten został sformułowany oryginalnie dla płaskiego stanu naprężenia. Funkcja uplastycznienia dla tego warunku wyraża się następującym wzorem:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) - 2(\sigma_Y)^M = 0 \quad (110)$$

gdzie:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = a|K_1 + K_2|^M + a|K_1 - K_2|^M + (2 - a)|K_2|^M \quad (111)$$

$$K_1 = \frac{\sigma_{xx} + h\sigma_{yy}}{2} \quad (112)$$

$$K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - h\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + b^2\sigma_{xy}^2} \quad (113)$$

M , a , b , h są parametrami materiałowymi a σ_Y jest naprężeniem uplastyczniającym dla kierunku ortotropii 1.

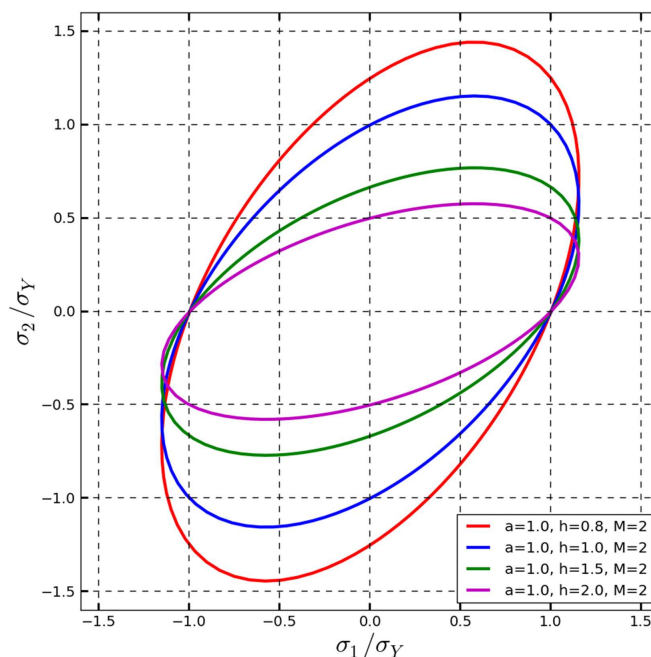
Funkcja ta jest wypukła jeżeli:

$$M > 1, \quad a, b, h > 0, \quad a < 2 \quad (114)$$

Stała materiałowa h wyraża stosunek naprężenia uplastyczniającego na kierunku głównym 1 ortotropii (σ_{xx}^Y) do naprężenia uplastyczniającego na kierunku głównym 2 ortotropii (σ_{yy}^Y).

$$h = \frac{\sigma_{xx}^Y}{\sigma_{yy}^Y} \quad (115)$$

Wpływ wartości stałej materiałowej h na powierzchnie plastyczności został zilustrowany na Rys. 5. Rysunek ten przedstawia projekcje funkcji (1) na płaszczyznę $\sigma_1 - \sigma_2$ naprężeń głównych. Widać wyraźnie, że wraz ze wzrostem parametru h wzrasta stosunek granicy plastyczności na kierunku głównym ortotropii 1 do granicy plastyczności na kierunku głównym ortotropii 2.



Rysunek 5: Wpływ różnych wartości parametru h na kształt powierzchni plastyczności Barlata–Liana.

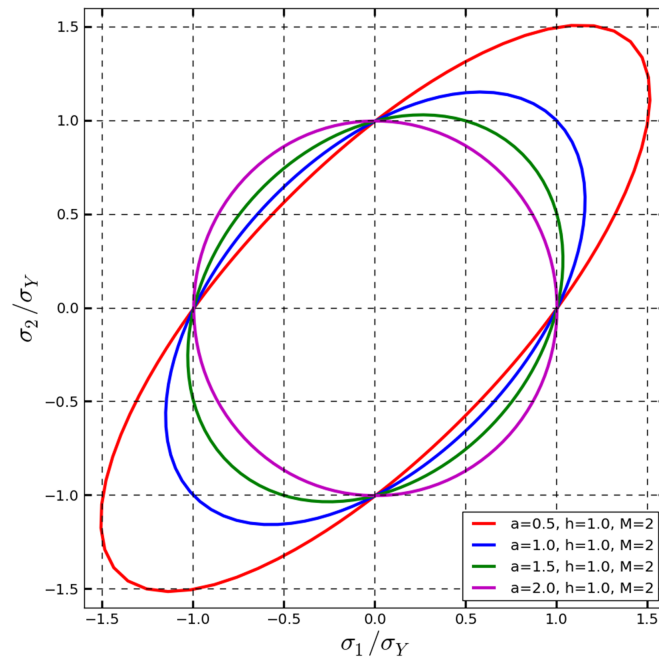
Kolejną stałą materiałową funkcji (1) jest parametr a , który odpowiada za rozciąganie lub ściskanie powierzchni na kierunku prostej nachylonej pod kątem α , którego kotangens jest równy stałej materiałowej h . Wpływ parametru a został przedstawiony na Rys. 6.

Kolejną stałą materiałową kryterium Barlata-Liana to stała b , której wpływ na kształt powierzchni plastyczności objawia się tylko wtedy gdy obecne są naprężenia styczne σ_{xy} . Wpływ parametru b na kształt powierzchni plastyczności można pokazać zakładając niezerowe naprężenia styczne. Efekt ten, został zilustrowany na Rys.7. Widać że wraz ze wzrostem naprężeń stycznych, powierzchnia plastyczności kurczy się.

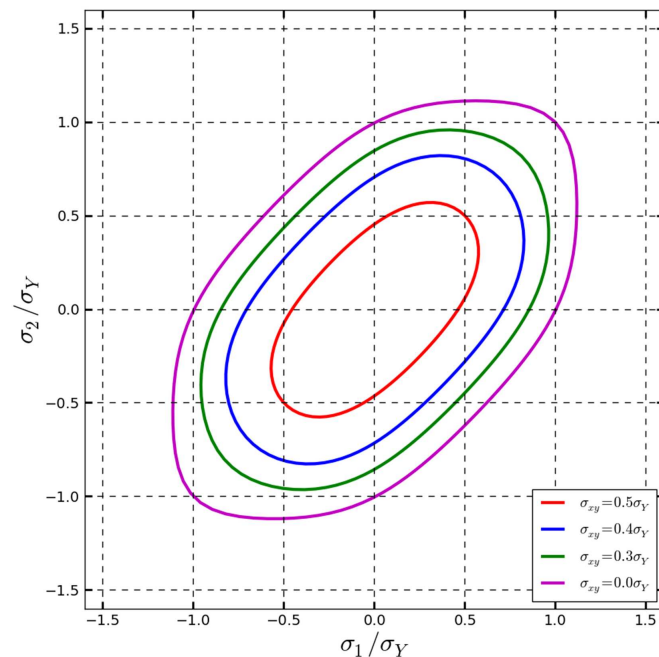
Ostatnią stałą materiałową kryterium Barlata-Liana jest stała M , która wpływa na krzywiznę powierzchni. Rys. 8. przedstawia przykłady powierzchni plastyczności dla różnych parametrów M .

Kryterium Barlata-Liana przechodzi w klasyczne kryterium Misesa gdy $M = 2$, $a = b = h = 1$, natomiast w kryterium Tresca gdy $M = 1 \vee \infty$, $a = b = h = 1$. Można również pokazać, że kryterium to przechodzi w kryterium Hilla dla płaskiego stanu naprężenia gdy:

$$\begin{aligned} G &= 1 - \frac{1}{2}(2h - ah), & H &= \frac{1}{2}(2h - ah), & F &= h^2 - \frac{1}{2}(2h - ah) \\ L &= \frac{1}{2}(4b^2 - ab^2), & M &= 2 \end{aligned} \quad (116)$$



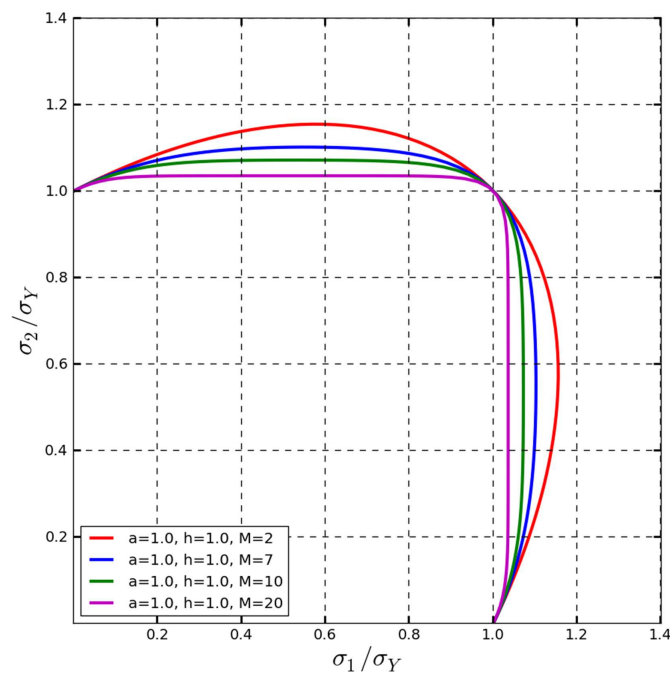
Rysunek 6: Wpływ różnych wartości parametru a na kształt powierzchni plastyczności Barlata-Liana.



Rysunek 7: Wpływ różnych wartości naprężeń stycznych na kształt powierzchni plastyczności Barlata-Liana.

Model konstytutywny z warunkiem plastyczności Burzyńskiego

Zaproponowany przez Burzyńskiego model z 1928 (Burzyński [3]) został zmodyfikowany w celu lepszego opisu cienkich płyt blachy. W tym celu oprócz różnicy wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie uwzględniona została również anizotropia transwersalna. Warunek plas-



Rysunek 8: Wpływ parametru M na kształt powierzchni plastyczności Barlata-Liana.

tyczności opisany jest równaniem

$$f = \frac{1}{2k_1} \left[3(k_1 - 1)p + \sqrt{9(k_1 - 1)^3 p^2 + 4k_1 q^2} \right] - \sigma_Y \quad (117)$$

gdzie p oznacza ciśnienie hydrostatyczne a

$$q = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + R_B \sigma_{xx} \sigma_{yy} + (2 - R_B) \sigma_{xy}^2} \quad (118)$$

oraz

$$R_B = 2 - \frac{1}{k_1 k_2^2} - \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_1 k_2} \quad (119)$$

1.10 Dyskretyzacja równań ruchu po czasie

Rozwiązanie zagadnienia dynamiki opisanego równaniem (75) z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi polega na przeprowadzeniu całkowania tego równania względem czasu. Całkowanie względem czasu odbywa się w sposób przyrostowy, w którym odkształcone konfiguracje są wyznaczone dla kolejnych chwil $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, T$, gdzie $t_1 = \Delta t_1$, $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$, a Δt_n jest długością kroku całkowania, a n jest numerem kroku całkowania.

1.10.1 Całkowanie niejawne równań ruchu

Schematy niejawne rozwiązania wykorzystują równanie (75) napisane dla nieznannej konfiguracji w chwili czasu $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, dla której poszukuje się rozwiązania przy znanym rozwiązaniu w chwili t_n :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}. \quad (120)$$

Po prawej stronie równania (120) znajduje się człon zależny od poszukiwanego rozwiązania \mathbf{r}_{n+1}

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (121)$$

Rozwiązanie równania (120) wymaga zastosowania odpowiedniej procedury iteracyjnej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}), \quad (122)$$

gdzie indeksy (k) i $(k+1)$ określają kolejne iteracje.

Można stosować różne schematy iteracyjne w celu wyznaczenia rozwiązania. Zwykle niejawna procedura rozwiązania wykorzystuje linearyzację wektora sił wewnętrznych wokół pewnego punktu, np. wokół stanu odkształcenia określonego poprzez $\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k+1)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)}) &= \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \\ &= \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) + \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \end{aligned} \quad (123)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}}. \quad (124)$$

jest tzw. styczną macierzą sztywności. Przy uwzględnieniu równań (122) i (123) schemat iteracyjny Newtona–Raphsona można zapisać

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}). \quad (125)$$

Z równania (125) wyznacza się iteracyjną poprawkę $\delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$, za pomocą której koryguje się rozwiązanie

$$\mathbf{r}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \quad (126)$$

aż do uzyskania pożądanej zbieżności w równaniu (122).

Rozwiązanie równań (125) i (128) wymaga rozwiązania układu równań algebraicznych, co w przypadku symulacji dużych rzeczywistych problemów może wymagać bardzo długich czasów obliczeń. Niekiedy mogą się pojawić problemy ze zbieżnością procedury iteracyjnej. W symulacji zagadnień kontaktowych dodatkowym problemem jest zmiana aktywnych

powierzchni kontaktu w trakcie iteracji. Tych wad nie mają procedury rozwiązywania oparte na schematach jawnych.

Jeśli człony uwzględniające efekty inercyjne i lepkie w równaniu (75) są małe, można je zaniedbać otrzymując równanie równowagi quasi-statycznej. Równanie to zapisane dla nieznannej konfiguracji w chwili czasu t_{n+1} ma następującą postać:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}} = 0. \quad (127)$$

Warunek równowagi (127) jest podstawą niejawnego schematu rozwiązania zagadnienia quasi-statycznego. Podobnie jak w przypadku modelu dynamicznego niejawnie rozwiązanie zagadnienia quasi-statycznego wymaga zastosowania procedury iteracyjnej, np. danej równaniem analogicznym do równania (125):

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}), \quad (128)$$

z którego wyznacza się iteracyjną poprawkę $\delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$ służącą do otrzymania kolejnego przybliżenia rozwiązania zgodnie z równaniem (126). Iteracje prowadzi się do otrzymania rozwiązania spełniającego warunek (127) z pożądaną dokładnością.

1.10.2 Schemat jawny całkowania równań ruchu

Algorytmy jawnego całkowania wykorzystują postać dyskretnych równań ruchu (75) zapisanych dla znanej konfiguracji w chwili t_n :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n^{\text{ext}} - \mathbf{F}_n^{\text{int}}. \quad (129)$$

Z równania (129) wyznacza się rozwiązanie dla następnej chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$. Typowym algorytmem jawnego całkowania w czasie jest schemat różnic centralnych ze zmiennym krokiem całkowania:

$$\ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{M}_D^{-1} (\mathbf{F}_n^{\text{ext}} - \mathbf{F}_n^{\text{int}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_n), \quad \text{gdzie } \mathbf{M}_D = \text{diag } \mathbf{M}, \quad (130)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{r}}_{n-1/2} + \ddot{\mathbf{r}}_n \Delta t_{n+1/2}, \quad \text{gdzie } \Delta t_{n+1/2} = \frac{1}{2}(\Delta t_n + \Delta t_{n+1}), \quad (131)$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \dot{\mathbf{r}}_{n+1/2} \Delta t_{n+1}. \quad (132)$$

Algorytm całkowania pozwala na stosowanie zmiennego kroku całkowania.

Model elementów skończonych może posiadać zarówno przemieszczeniowe, jak i obrotowe stopnie swobody. W przypadku obecności stopni swobody obydwu rodzajów konfiguracja odkształcona w chwili t_n jest określona przez przemieszczenia \mathbf{r}_n wszystkich węzłów oraz przez odpowiednie macierze obrotu określające położenie kątowe węzłów posiadających obrotowe stopnie swobody. W każdym kroku czasu oblicza się aktualne przyśpieszenia i prędkości liniowe i kątowe, następnie przyrostowe przemieszczenia i obroty, które służą do uaktualnienia konfiguracji.

Macierz mas zdefiniowana równaniem (61) jest zwana macierzą konsystentną. Przy stosowaniu macierzy konsystentnej równania ruchu są sprzężone i całkowanie wymaga odwracania macierzy w każdym kroku całkowania. Zastąpienie macierzy konsystentnej macierzą mas skupionych (diagonalną) daje bardzo duży wzrost efektywności rozwiązania – równania ruchu są rozprężone i nie ma potrzeby odwracania żadnej macierzy. Zastosowanie macierzy diagonalnej w niewielkim stopniu wpływa na rozwiązanie. Macierz konsystentna daje górne oszacowanie wartości własnych, macierz mas skupionych daje częstości drgań własnych, które są niższe niż częstości rzeczywiste [6]. Macierz mas skupionych może być otrzymana w różny sposób. Najprostszym sposobem jest równomierne rozłożenie masy elementu na definiujące go węzły – jest to sposób wystarczający dla prostych elementów, jak np. liniowy element trójkątny lub czworościenny.

1.10.3 Stabilność schematu całkowania równań ruchu

Schemat całkowania numerycznego równań ruchu względem czasu jest stabilny, jeśli przy dowolnych warunkach początkowych i braku obciążeń zewnętrznych, po dowolnie wielu krokach całkowania wszystkie przemieszczenia są ograniczone. Schemat jawny całkowania metodą różnic centralnych jest stabilny pod warunkiem, że krok całkowania Δt nie jest dłuższy niż pewien graniczny krok zwany krokiem krytycznym Δt_{cr}

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}}, \quad (133)$$

gdzie ω_{\max} jest najwyższą częstotliwością własną układu dyskretnego. Można dowieść, że najwyższa częstotaść układu dyskretnego elementów skończonych ω_{\max} jest nie większa niż najwyższa z częstotliwości drgań własnych pojedynczych elementów systemu ω_{\max}^E [2]

$$\omega_{\max} \leq \omega_{\max}^E, \quad \text{gdzie} \quad \omega_{\max}^E = \max_{i,e} \omega_i^e, \quad i = 1, \dots, n_{dof}^e, \quad e = 1, \dots, n_E \quad (134)$$

n_{dof}^e jest liczbą stopni swobody elementu, a n_E – liczbą elementów skończonych. Ograniczenie (134) pozwala oszacować najwyższą częstotliwość całego układu wyznaczając częstotliwości własne dla pojedynczych elementów. Dla prostych elementów wyrażenie na częstotliwości własne można otrzymać w jawny sposób [13]. W innych przypadkach można ją oszacować za pomocą przybliżeń wzorów lub rozwiązać zagadnienie własne.

Równanie (133) jest prawdziwe przy założeniu zerowego tłumienia. Jeśli w układzie występuje tłumienie, krytyczny krok jest dany następującym wyrażeniem:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right), \quad (135)$$

gdzie parametr ξ , określający wielkość tłumienia, stanowi stosunek wielkości występującego tłumienia do tłumienia krytycznego, dla drgań swobodnych o częstotliwości ω_{\max} .

Podsumowanie

W niniejszym rozdziale zaprezentowano sformułowanie teoretyczne zagadnienia kontaktu z tarciami dla układu ciał odkształcalnych. Przedstawiono sformułowanie modelu matematycznego ciągłego oraz procedurę dyskretyzacji przestrzennej prowadzącą do równań MES oraz procedurę dyskretyzacji w czasie, która jest stosowana do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych opisujących zagadnienie dynamiczne. Przedstawiono również sformułowanie elementu skończonego służącego do dyskretyzacji przestrzennej oraz sformułowanie modelu konstytutywnego opisującego zachowanie odkształcanego materiału. Przedstawione sformułowanie jest podstawą algorytmów numerycznych implementowanych w programie Numpress-Explicit.

2 Opis programu

Wstęp

Przedstawione w poprzednim rozdziale sformułowanie dynamiczne zagadnienia kontaktowego z jawnym całkowaniem równań ruchu stało się podstawą do opracowania algorytmów i procedur numerycznych implementowanych w module analitycznym NUMPRESS-EXPLICIT, którego przeznaczeniem jest dokładna analiza zagadnienia tłoczenia blach. Program został stworzony od podstaw.

Opis pracy programu

Program stworzony jako aplikacja konsolowa jest wywoływany z wiersza linii poleceń przez podanie nazwy programu wraz z parametrami sterującymi:

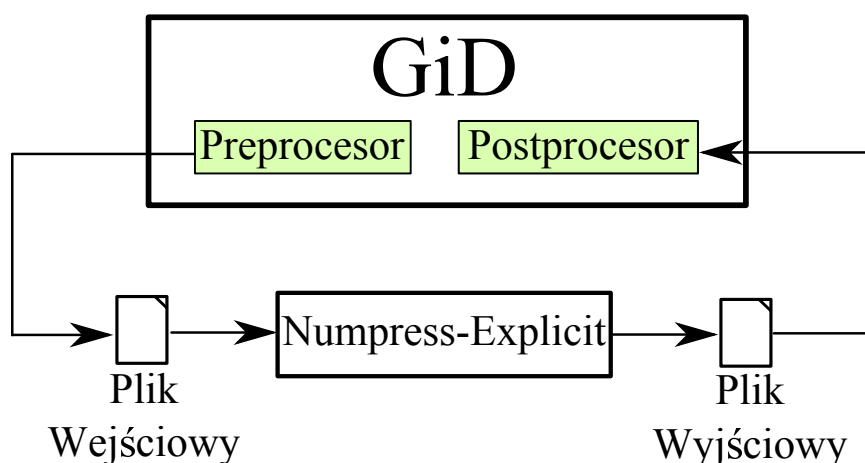
Numpress_explicit.exe INP=blotnik_lewy.inp TYPE=NEW PRJN=test.

Parametry wywołania zadania opisano w tabeli 1.

Nazwa parametru	Opis	Przyjmowane wartości
INP	Nazwa pliku danych	Dowolna nazwa pliku zgodna z systemem operacyjnym
TYPE	Rodzaj zadania	NEW – nowe zadanie
PRJN	Nazwa Projektu	Dowolna nazwa zgodna z dozwolonym nazewnictwem folderów danego OS

Tabela 1: Parametry wywołania programu

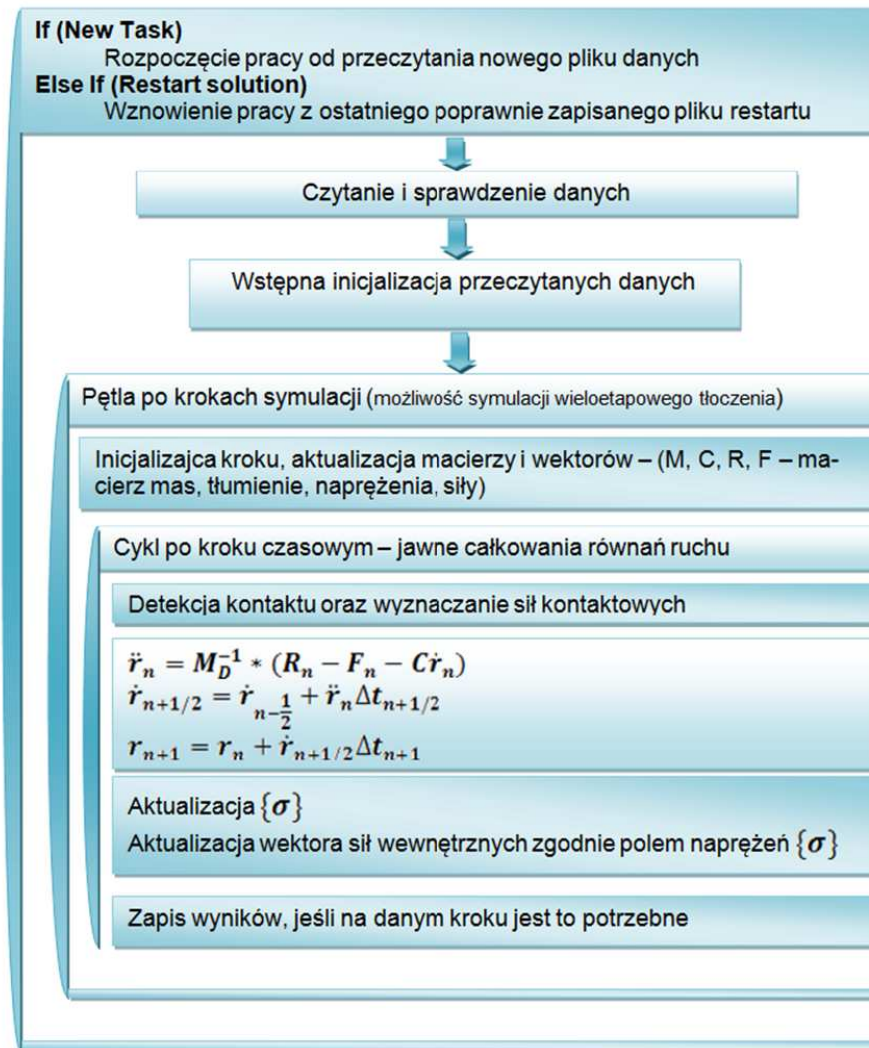
Program obliczeniowy Numpress-Explicit współpracuje z pre- i postprocesorem graficznym GiD (rys. 9). Schemat głównej pętli obliczeniowa programu realizującej algorytm numeryczny



Rysunek 9: Schemat współpracy programu Numpress-Explicit z Pre/Post-procesorem GiD.

MES odpowiadający sformułowaniu teoretycznemu opisanemu w rozdziale 1.2 jest przedstawiony na rysunku 10.

Program rozpoczyna działanie od wczytania pliku danych, a następnie jest sprawdzana poprawność parametrów wejściowych zadania. Po przeczytaniu danych program tworzy katalog o nazwie *Nazwa_Projektu_NPR*. Nazwa ta zawsze składa się z *NazwyProjektu* zadanej w wierszu poleceń oraz końcówki *_NPR*. Wewnątrz tego folderu program tworzy zbiór



Rysunek 10: Schemat blokowy pętli obliczeniowej

tymczasowych plików roboczych oraz plików wynikowych. Po sprawdzeniu danych i przed wejściem do głównej pętli obliczeniowej inicjalizowane są dane sterujące zadaniem, dane geometryczne modelu, baza elementów skończonych, warunki kinematyczne oraz obciążeniowe oraz baza algorytmu kontaktu.

Następnie wykonywana jest pętla jawnego całkowania równań ruchu względem czasu, która sekwencyjnie wykonuje następujące operacje:

1. wyznaczenie kroku całkowania Δt ,
2. obliczenie sił kontaktowych,
3. całkowanie jawne równań ruchu,
4. wyznaczanie wektora sił wewnętrznych,
5. zapis wyników.

Wyniki są zapisywane z zadaną częstotliwością w formacie zgodnym z postprocesorem graficznym GiD, a ponadto tworzony jest plik zawierający odkształcenia główne potrzebne do budowy wykresu odkształceń granicznych (ang. FLD – forming limit diagram). Do zapisu wykorzystuje się bibliotekę procedur opracowaną przez producenta oprogramowania GiD.

3 Przykłady testowe

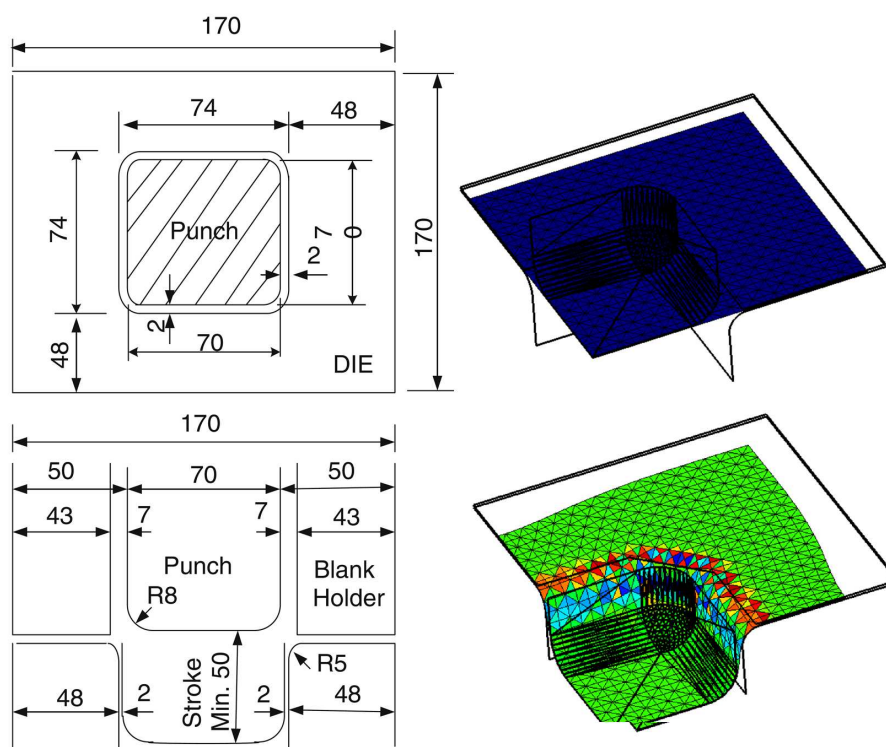
Wstęp

W poniższym rozdziale zostaną przedstawione wybrane przykłady testowe wykorzystane do weryfikacji programu Numpress-Explicit. Poprawność działania programu sprawdzono poprzez porównanie uzyskanych wyników z wynikami analitycznymi, numerycznymi lub eksperymentalnymi.

3.1 Symulacja tłoczenia naczynia kwadratowego – test NUMISHEET’93

Przeprowadzono symulację tłoczenia naczynia kwadratowego, przykładu testowego zdefiniowanego na konferencję NUMISHEET’93. Geometria oraz dyskretyzacja przykładu są przedstawione na rys. 11. Rozpatrzono ćwiartkę geometrii zadając warunki symetrii. Model przygotowano dla blachy aluminiowej o grubości 0.81 mm. Przyjęto parametry materiałowe podane w tabelach 2 i 3 oraz krzywą umocnienia daną równaniem Swifta:

$$\sigma(\varepsilon) = 576.79 \cdot 10^6 \cdot (0.01658 + \varepsilon)^{0.3593} \quad (136)$$



Rysunek 11: Geometria modelu oraz dyskretyzacja MES – 1250 elementów.

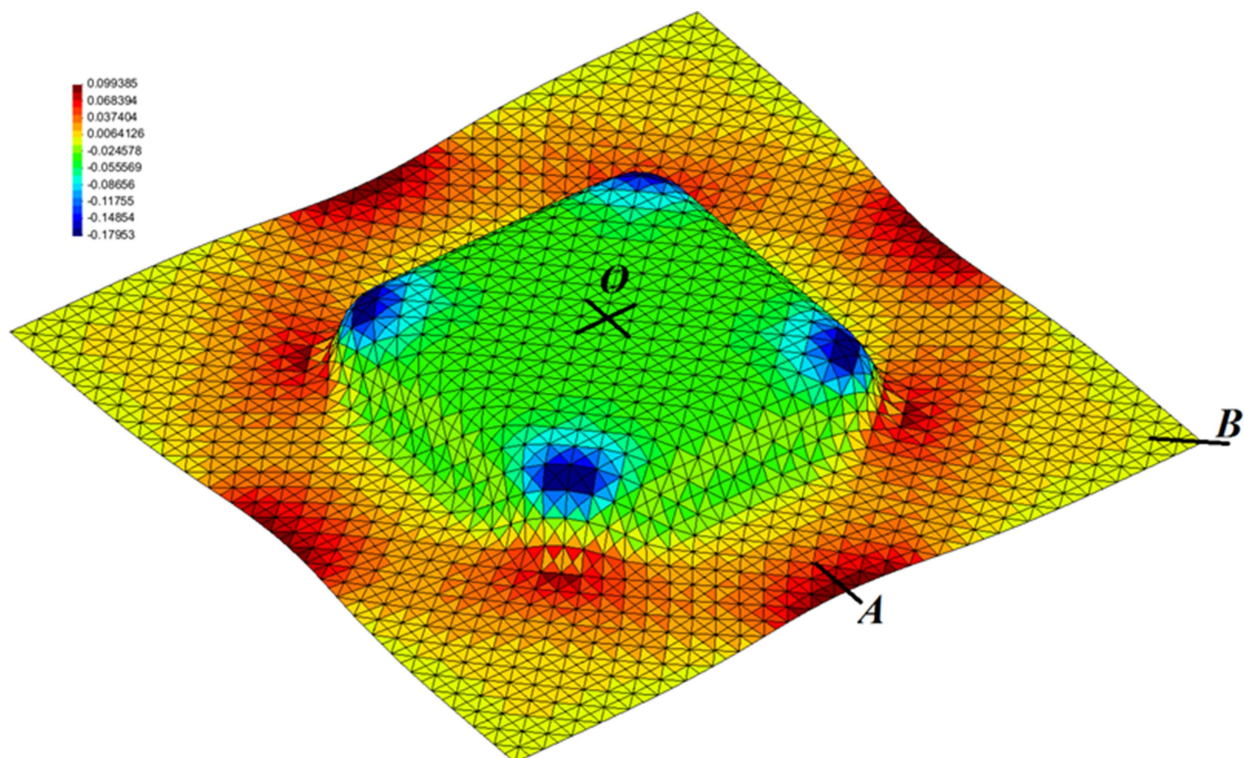
Moduł Young’a	$E = 0.71e + 11$
Współczynnik Poisson’a	$\nu = 0.33$
Gęstość	$\rho = 2800$

Tabela 2: Właściwości mechaniczne badanej blachy aluminiowej.

Kierunek pobrania próbki	C [MPa]	n dla $\varepsilon_1 = 0.02 \div 0.20$	r
0°	570.40	0.3469	0.71
45°	578.35	0.3633	0.58
90°	580.04	0.3636	0.70

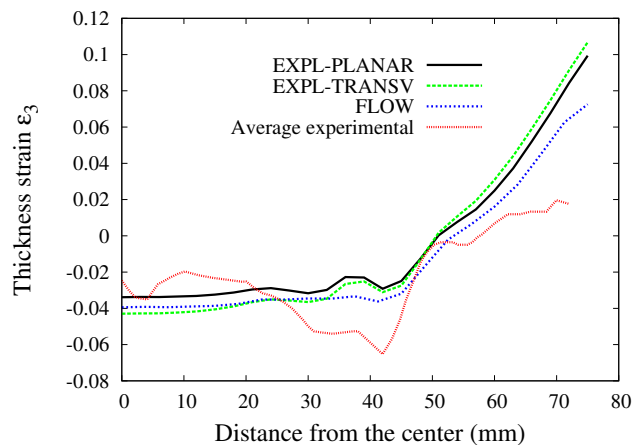
Tabela 3: Właściwości anizotropowe badanej blachy aluminiowej.

Symulacje wykonano dla przypadku anizotropii normalnej (transwersalnej) oraz płaskiej. Kształt wytłoczki z naniesionym rozkładem odkształceń po grubości dla głębokości tłoczenia 15 mm pokazano na rys. 12. Otrzymane wyniki porównano z danymi eksperymentalnymi oraz

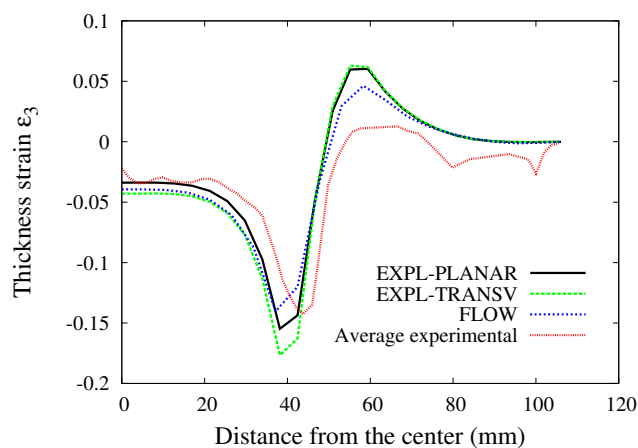
Rysunek 12: Rozkład odkształceń po grubości ε_3 dla głębokości 15 mm.

wynikami numerycznymi z programu NUMPRESS-FLOW. Porównanie rozkładów odkształceń po grubości wzdłuż linii OA i OB dla głębokości tłoczenia 15 mm pokazano na rysunkach 13 i 14. Widoczna jest dobra zgodność wyników obydwu programów z wynikami eksperymentalnymi.

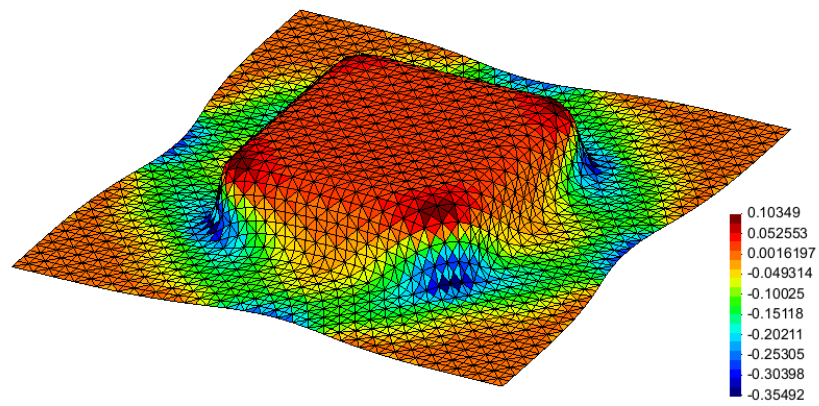
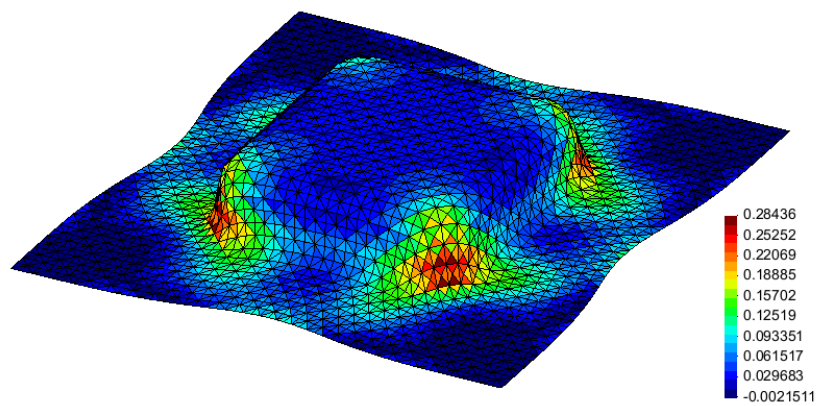
Na rys. 15 przedstawiono kształt wytłoczki wytłoczonej na głębokość 20 mm z naniesionymi odkształceniami głównymi. Odkształcenia te wykorzystano do zbudowania wykresu odkształceń granicznych (rys. 16). Na wykresie na rys. 16 widać, że punkty reprezentujące odkształcenia główne blachy są blisko granicznej krzywej tłoczności (GKT), co wskazuje na duże prawdopodobieństwo wystąpienia pęknięcia. Według danych eksperymentalnych pęknięcie blachy może wystąpić przy głębokości 19 mm.



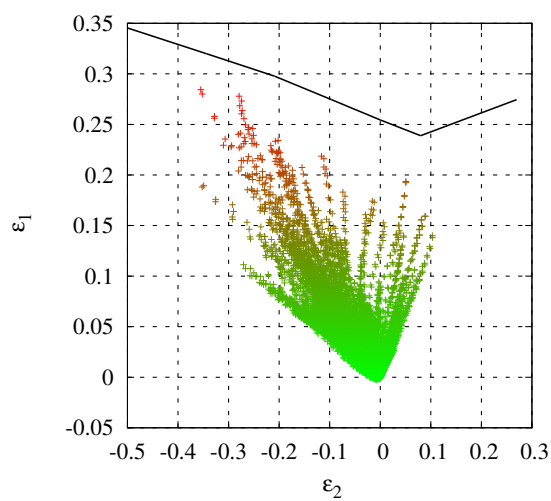
Rysunek 13: Porównanie rozkładu odkształceń po grubości ϵ_3 dla głębokości 15 mm wzdłuż linii OA



Rysunek 14: Porównanie rozkładu odkształceń po grubości ϵ_3 dla głębokości 15 mm wzdłuż linii OB.

**Min. odkształcenia główne****Maks. odkształcenie główne**

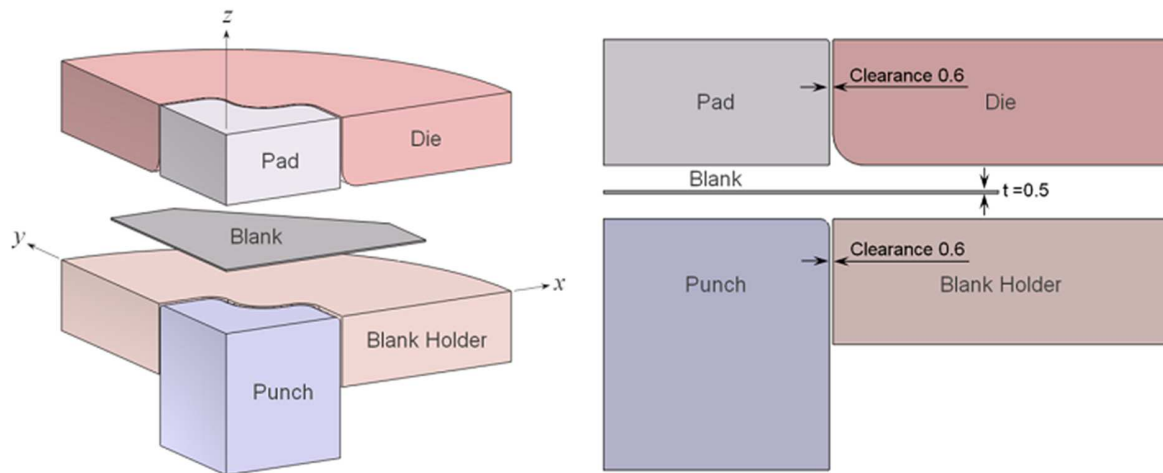
Rysunek 15: Kształt wytłoczki z naniesionymi rozkładami odkształceń głównych dla głębokości tłoczenia 20 mm



Rysunek 16: Wykres odkształceń granicznych dla głębokości tłoczenia 20 mm

3.2 Symulacja tłoczenie naczynia o kształcie krzyża – test NUMISHEET’2011

Przeprowadzono symulacje tłoczenie naczynia o kształcie krzyża, testu zdefiniowanego na konferencję NUMISHEET’2011. Naczynie jest wytłoczone z blachy aluminiowej o grubości



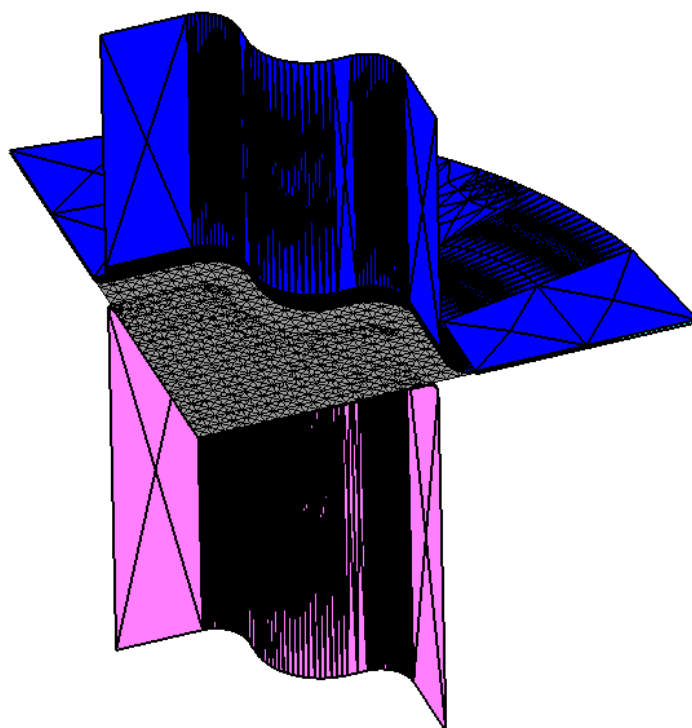
Rysunek 17: Układ narzędzi oraz przygotówki.

$h = 0.5$ mm o następujących parametrach: $\rho = 2830$ kg/m³, $E = 71$ GPa, $\nu = 0.33$, krzywa umocnienia $\sigma = 576.79 (0.01658 + \varepsilon_p)^{0.359}$ MPa, średni współczynnik Lankforda $R = 0.64$.

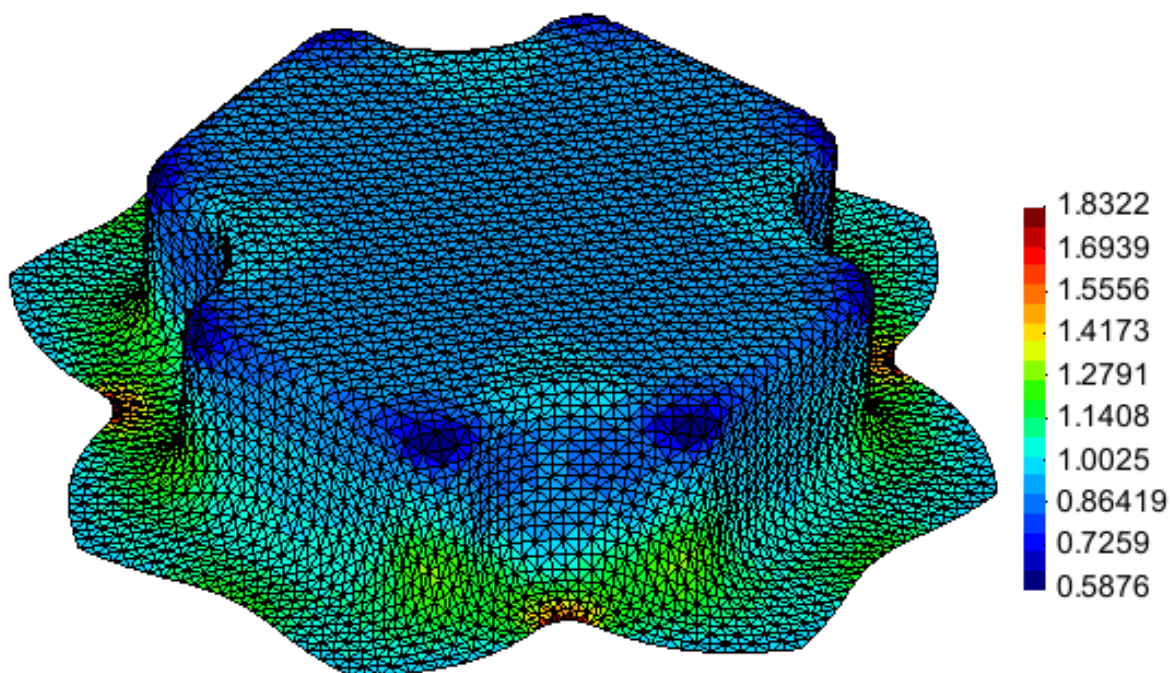
Wykorzystując symetrię w modelu rozpatrywano ćwiartkę geometrii narzędzi i blachy. Schematycznie układ narzędzi i przygotóvkę pokazano na rysunku 17. W modelu MES przygotóvkę podzielono na 2800 elementów skończonych (Rys. 18), stempel dociskacz i matrycę na 10824 elementy sztywne. Założono następujące parametry procesu:

- prędkość stempla $v = 1$ m/s,
- głębokość tłoczenia $h = 2$ cm
- siła docisku liniowo zmienna od 1.80 do 3.96 kN
- współczynnik tarcia Coulomba $\nu = 0.05$

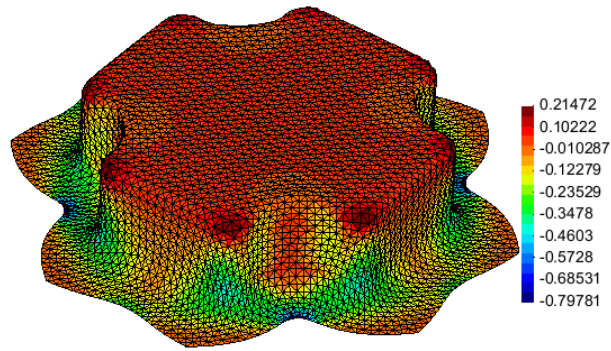
Wyniki symulacji programem NUMPRESS-EXPLICIT przedstawiono na rysunkach 19–21. Pocienienie wytłoczki przedstawiano na rysunku 19 oraz odkształcenia główne maksymalne i minimalne pokazano na rysunku 20. Wykres odkształceń granicznych jest pokazany na rys. 21. Na podstawie wykresu odkształceń granicznych oraz rozkładów odkształceń widać, że wytłoczka z dużym prawdopodobieństwem pęknie w narożach.



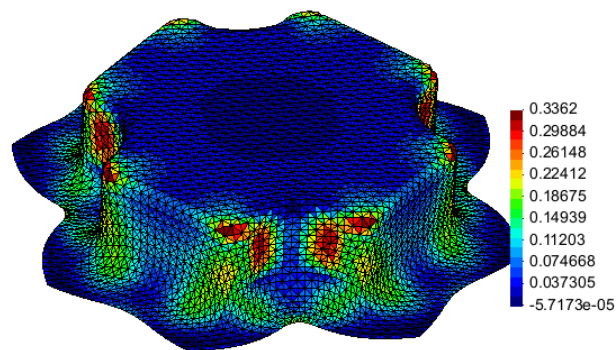
Rysunek 18: Model geometryczny MES



Rysunek 19: Końcowy kształt wylóczki z naniesionym polem pocienienia.

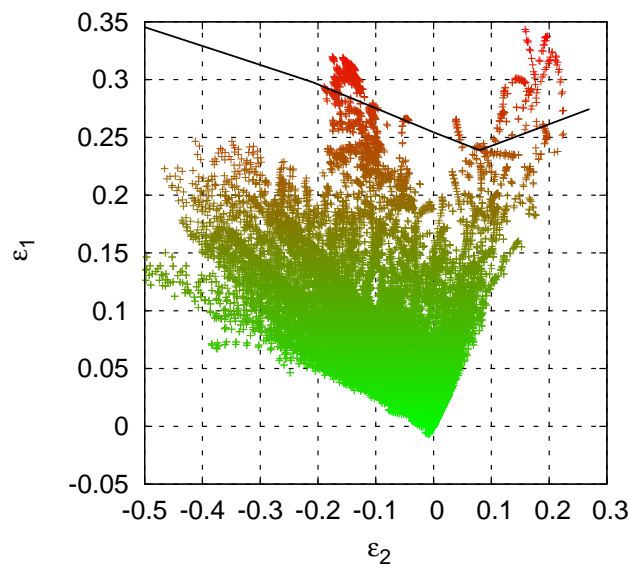


Min. odkształcenia główne



Maks. odkształcenie główne

Rysunek 20: Rozkład odkształceń głównych ε_1 , ε_2 .



Rysunek 21: Wykres odkształceń granicznych.

Literatura

- [1] F. Barlat and K. Lian. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. part i: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *International Journal of Plasticity*, 5(1):51 – 66, 1989.
- [2] T. Belytschko, P. Smolinski, and W.K. Liu. Stability of multi-time step partitioned integrators for the first order finite element systems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49:281–297, 1985.
- [3] W. Burzyński. Selected passages from Włodzimierz Burzyński’s doctoral dissertation: “Study of Material Effort Hypotheses” printed in Polish by the Academy of Technical Sciences, Lwów, 1928, 1-192. Włodzimierz Burzyński (1900–1970). Translated in Polish: by Teresa Fraś and Anna Stręk; scientific editor Ryszard B. Pęcherski. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 57:185–215, 2009.
- [4] D. Chapelle and K.J. Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Springer, 2003.
- [5] W.J. Chung, J.W. Cho, and T. Belytschko. A Study on Dynamic Effects of Dynamic Explicit FEM in Sheet Metal Forming Analysis. In *Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Numisheet 96*, pages 414–426, Dearborn, Michigan, USA, September 29 – October 3, 1996, 1996.
- [6] R.D. Cook, D.S. Malkus, and M.E. Plesha. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, third edition, 1989.
- [7] M.S. Gadala and J. Wang. Computational implementation of stress integration in fe analysis of elasto-plastic large deformation problems. *Finite elem. anal. des.*, 35:379–396, 2000.
- [8] C. Garcia Garino, J. Rojek, and E. Oñate. Simulation of sheet metal stamping processes using a solid finite strain model. In *Proc. Fourth Pan American Congress of Applied Mechanics*, pages 97–102, 1995.
- [9] J.O. Hallquist. LS-DYNA. Theoretical Manual. Technical report, Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [10] J.O. Hallquist and K. Schweizerhof. Explicit integration schemes and contact formulations for thin sheet metal forming. *VDI Berichte*, 894:405–440, 1991.
- [11] E. Haug, E. di Pasquale, A.K. Pickett, and D. Ulrich. *Industrial sheet metal forming simulation using explicit finite element methods*. Zurich, 1991. VDI Berichte 894.
- [12] R. Hill. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc. London*, pages 281–297, 1948.
- [13] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [14] T.J.R. Hughes and J. Winget. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15:1862–1867, 1980.

- [15] J.K.Lee, G.L.Kinzel, and R.H. Wagoner, editors. *Proc. of the 3rd International Conference: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes*. Dearborn, Michigan, 1996.
- [16] M. Kawka and A. Makinouchi. Simulation of sheet metal forming processes: Theoretical aspects of the ITAS3D system. *RIKEN Review*, (14):13–14, 2001.
- [17] M. Kleiber. *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. PWN, 1989.
- [18] T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer, Berlin, 2002.
- [19] T.A. Laursen and J.C. Simo. A Continuum-based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multibody, Large Deformation Frictional Contact Problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36:3451–3485, 1993.
- [20] R. Michałowski and Z. Mróz. Associated and non-associated sliding rules in contact friction. *Archives of Mechanics*, 30(3):259–276, 1978.
- [21] E. Oñate, P. Cendoya, J. Rojek, and J. Miquel. A simple thin shell triangle with translational degrees of freedom for sheet stamping analysis. In *3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Numisheet 96*, pages 102–111, Dearborn, Michigan, USA, September 29 – October 3, 1996, 1996.
- [22] E. Oñate, P. Cendoya, J. Rojek, and J. Miquel. A simple thin shell triangle with translational degrees of freedom only. In S.N. Atluri and G. Yagawa, editors, *Advances in Computational Engineering Science*, pages 308–313. Tech Science Press, USA, 1997.
- [23] E. Oñate and M. Cervera. Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. A simple three node triangle. *Eng. Comput.*, 10:543–61, 1993.
- [24] E. Oñate, M. Cervera, and O.C. Zienkiewicz. *A Finite Volume Format for Structural Mechanics*. Publication CIMNE No. 15, Barcelona, 1992.
- [25] E. Oñate, J. Rojek, and C. García Garino. NUMISTAMP: a research project for assessment of finite element models for stamping processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 50(1-4):17–38, 1995.
- [26] E. Oñate, F. Zarate, J. Rojek, G. Duffett, and L. Neamtu. Advances in rotation free shell elements for sheet stamping analysis. In J.C. Gelin and P. Picart, editors, *Proceedings of the 4th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numisheet'99*, pages 157–164, 13–17.09. 1999, Besancon, France, 1999.
- [27] PAM-STAMP. *User's Manual*. ESI Inc., 2000.
- [28] J. Rojek, E. Oñate, and E. Postek. Application of explicit FE codes to simulation of sheet and bulk metal forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81:620–627, 1998.
- [29] M. Shillor, M. Sofonea, and J.J. Telega. *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Variational Methods*, Lect. Notes Phys. 655. Springer, 2004.

- [30] J.C. Simo and R.L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22:649–670, 1986.
- [31] G.M. Stanley. *Continuum–Based Shell Elements*. PhD thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, Stanford, California, 1985.
- [32] S.P. Wang and E. Nakamachi. Nonlinear contact and friction modeling in dynamic explicit finite element analysis. In *Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Numisheet 96*, pages 9–16, Dearborn, Michigan, USA, September 29 – October 3, 1996, 1996.
- [33] K. Wisniewski. *Finite rotations of shells and beams. Extended equations and numerical models*. IPPT PAN, 1997. Praca habilitacyjna.
- [34] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Berlin, 2002.
- [35] D.Y. Yang, S.I. Oh, H. Huh, and Y.H. Kim, editors. *Proceedings of the 5th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numisheet 2002*. Jeju Island, Korea, 21–25.10. 2002.
- [36] Z.H. Zhong. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*. Oxford University Press, 1993.